Sistemi di punti materiali

- Abbiamo mostrato come è possibile determinare il moto di un punto materiale
- Si determinano le forze che agiscono sul punto materiale
- Si applica la seconda legge di Newton
- Si risolvono le tre equazioni differenziali che ne derivano per determinare il moto delle proiezioni sugli assi dei punti (per moto nello spazio)
- Si determina così la legge oraria.

Sistemi di punti materiali

- Proviamo a descrivere il moto di sistemi più complessi che non possono essere rappresentati con un punto materiale applicando la stessa «tecnica» applicabile per il punto materiale.
- Dovremmo scrivere n volte la seconda legge della dinamica (una volta per ciascun punto facente parte del sistema) e dovremmo risolvere il sistema di 3n equazioni differenziali che otterremmo cosa, questa, non semplice

$$m_1 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{R}}_1$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{R}}_2$$

....

$$m_i \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_i}{dt^2} = \vec{\mathbf{R}}_i$$

$\vec{\mathbf{R}}_i$ = risultante delle forze agenti sulla particella i

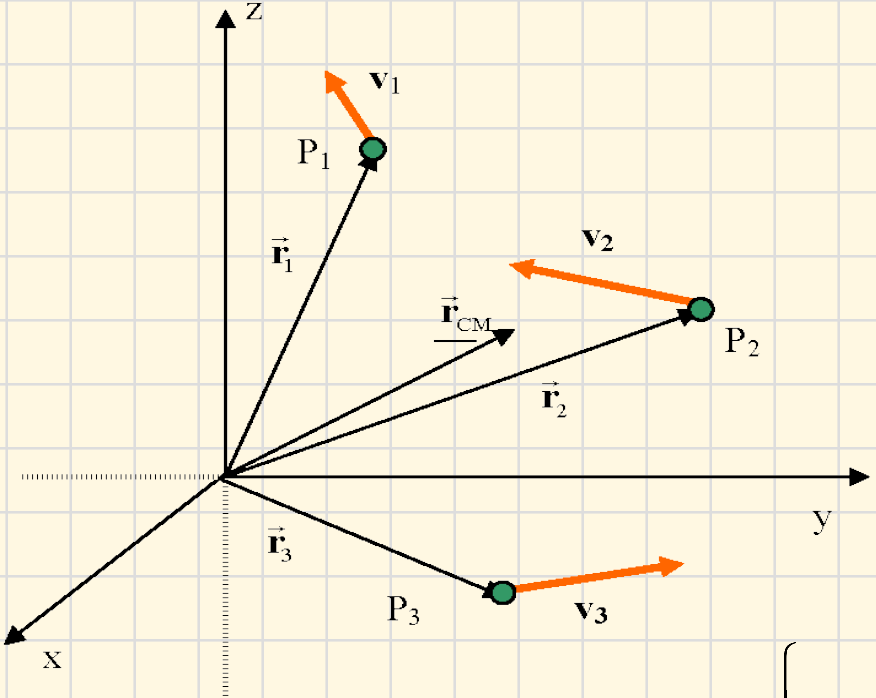
....

$$m_n \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_n}{dt^2} = \vec{\mathbf{R}}_n$$

Centro di massa di sistema di punti

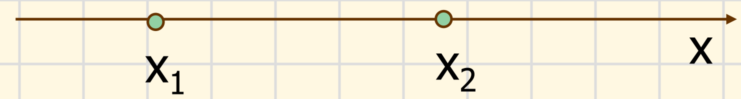
- Rinunciando ad una descrizione dettagliata del moto delle singole particelle, è possibile ottenere almeno una descrizione del moto dell’insieme delle particelle.
- Per far ciò è necessario definire il centro di massa di un sistema di punti materiali

Centro di massa di sistema di punti



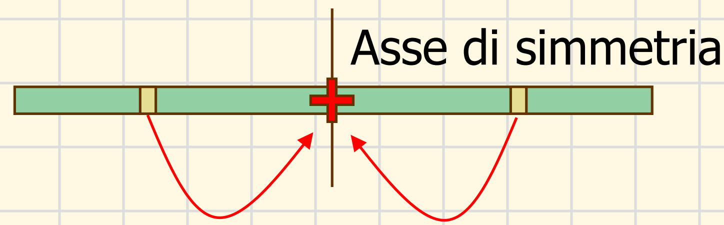
$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 + \ldots + m_n\vec{\mathbf{r}}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\mathbf{r}}_i}{M} \Rightarrow \begin{cases} x_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \\ y_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \\ z_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M} \end{cases}$$

Centro di massa di sistema di punti

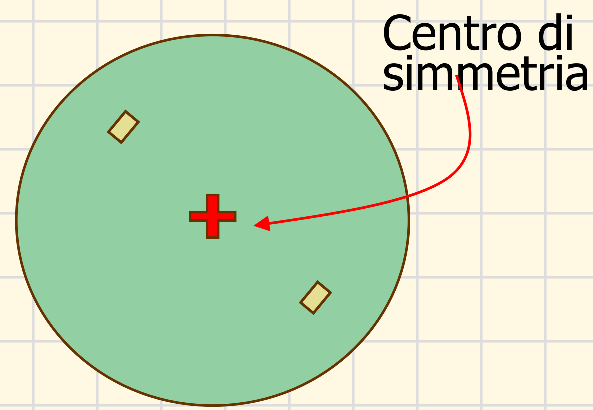


$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \underset{\substack{\text{se } m_1 = m_2 \\ \text{(sistema simmetrico)}}}{\Rightarrow} x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

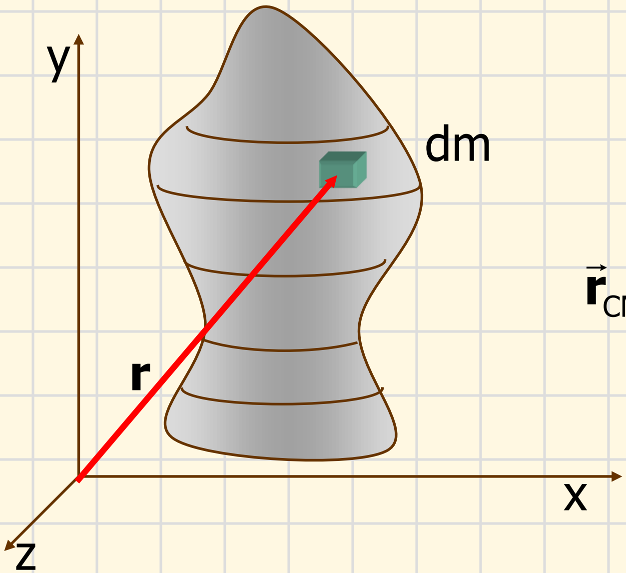
Centro di massa di una sbarra omogenea



Centro di massa di un disco omogeneo

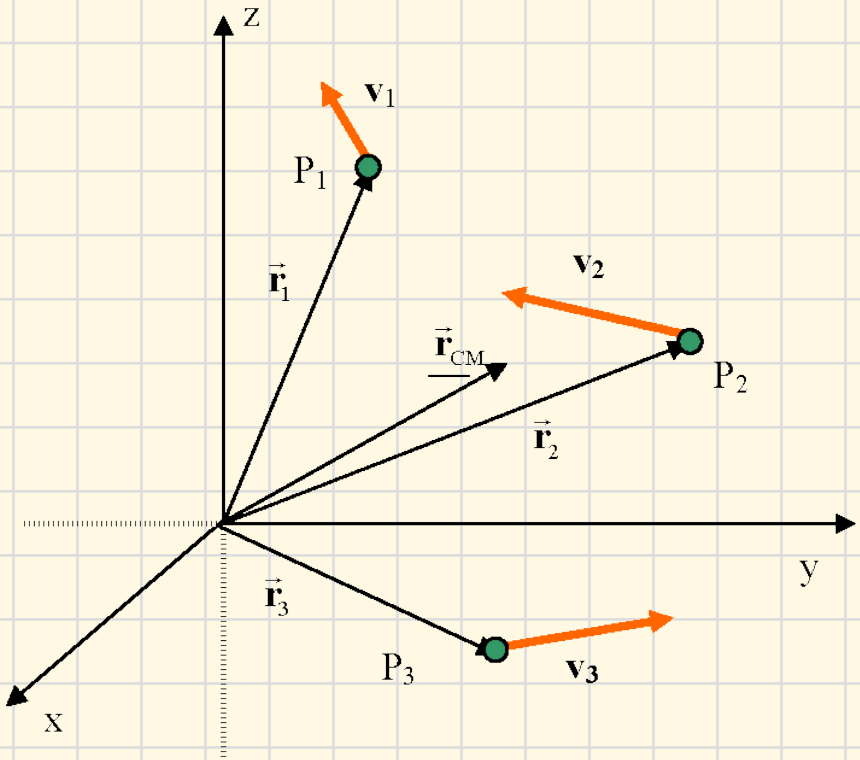


Centro di massa di sistema di punti



$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int_{corpo} dm\,\vec{\mathbf{r}}}{\int_{corpo} dm} \Rightarrow \begin{cases} x_{CM} = \dfrac{\int_{corpo} dm\ x}{\int_{corpo} dm} \\ y_{CM} = \dfrac{\int_{corpo} dm\ y}{\int_{corpo} dm} \\ z_{CM} = \dfrac{\int_{corpo} dm\ z}{\int_{corpo} dm} \end{cases}$$

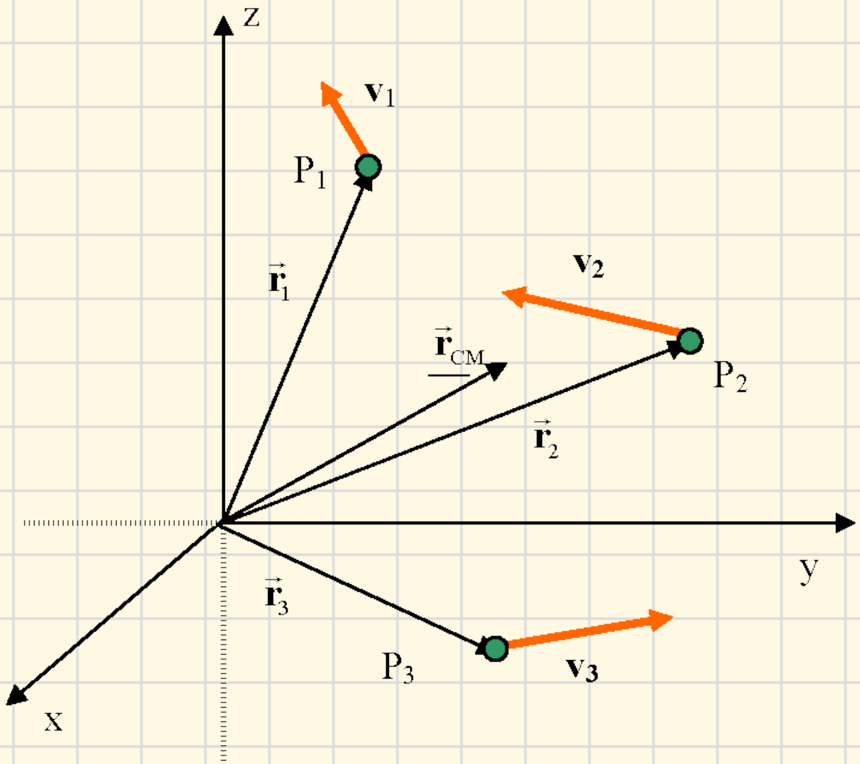
Velocità del centro di massa



$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M}$$

$$\underbrace{\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{CM}}{dt}}_{\text{per definizione}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i\right)}_{\text{perchè } \frac{1}{M} \text{ è costante}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt}}{M}}_{\text{perchè la derivata si può distribuire sulla somma e perchè } m_i \text{ è costante}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{M}$$

Accelerazione del centro di massa



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

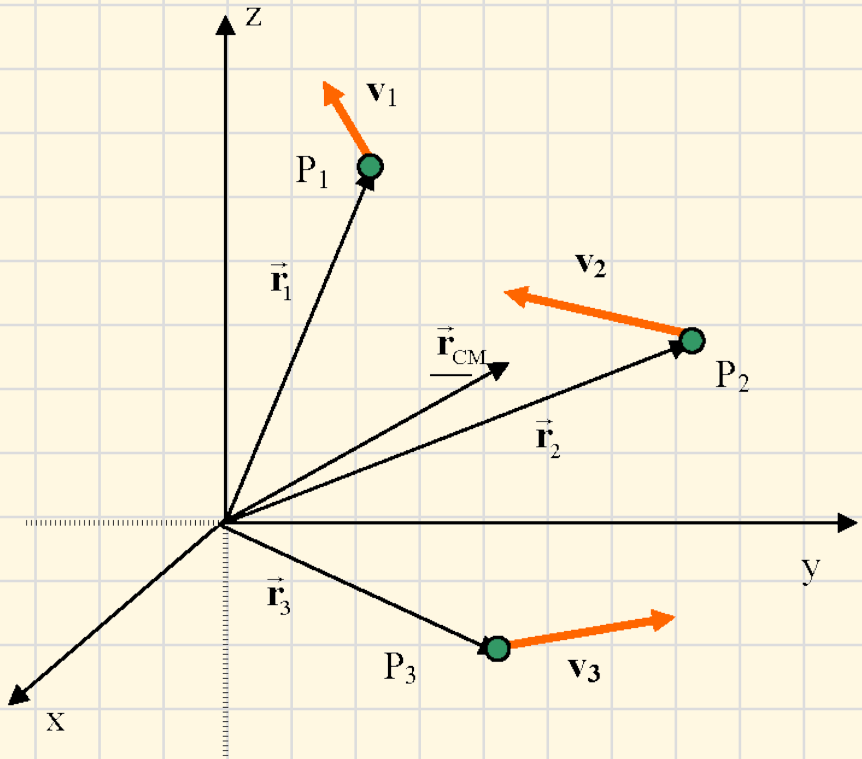
$$\underbrace{\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}}_{\text{per definizione}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\right)}_{\text{perchè } \frac{1}{M} \text{ è costante}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M}}_{\substack{\text{perchè la derivata si può} \\ \text{distribuire sulla somma} \\ \text{e perchè } m_i \text{ è costante}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{M}$$

Proprietà centro di massa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$$

$$\text{con } M = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

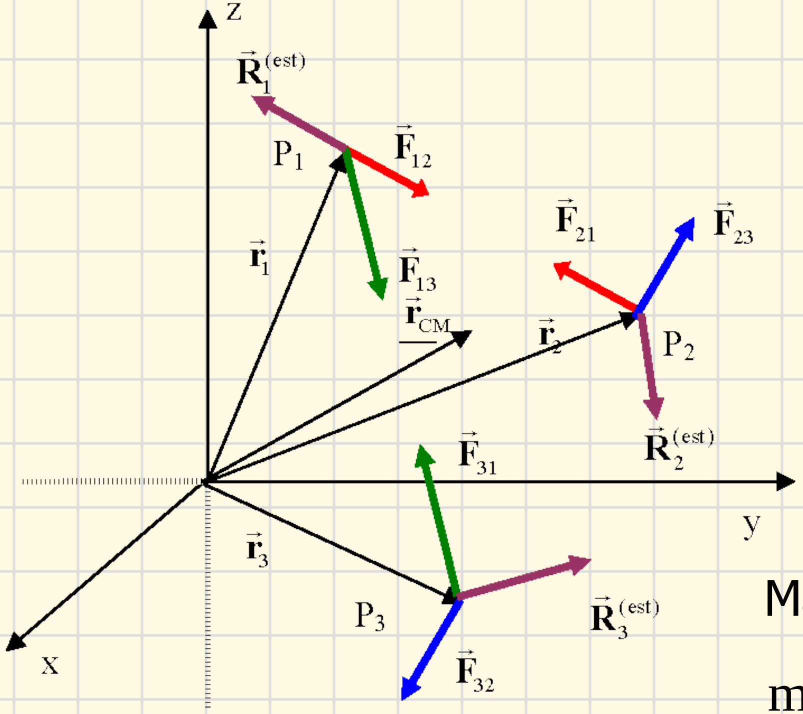


$$\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{M} \qquad v_{xCM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{xi}}{M} \qquad \vec{\mathbf{a}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{a}}_i}{M} \qquad a_{xCM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i a_{xi}}{M}$$

$$v_{yCM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{y_i}}{M} \qquad a_{yCM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i a_{y_i}}{M}$$

$$v_{zCM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{zi}}{M} \qquad a_{zCM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i a_{zi}}{M}$$

Teorema centro di massa



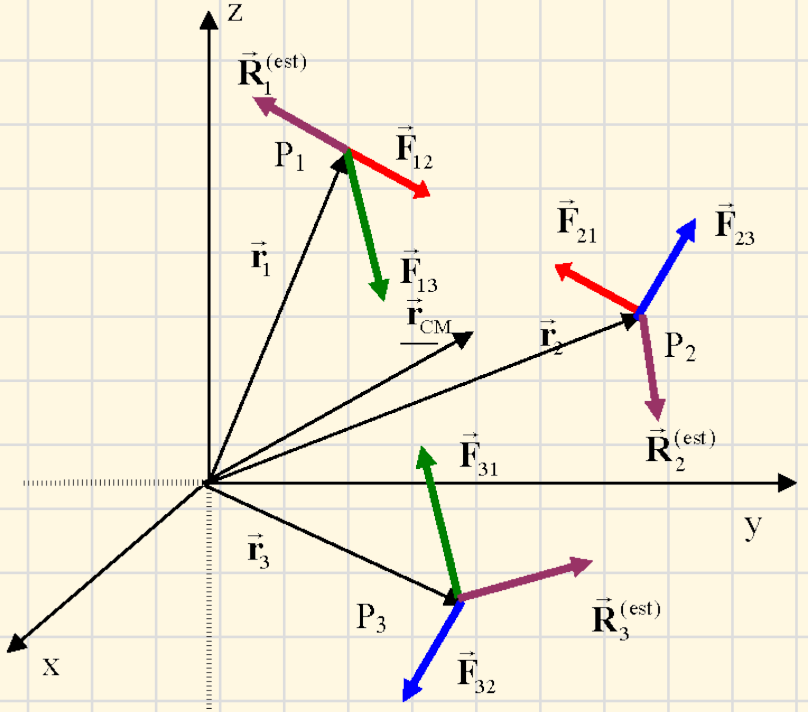
$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^{n} m_i\vec{a}_i \quad \text{(dalla def. di acc. del CM)}$$

$$m_i\vec{a}_i = \vec{R}_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

- La forza R_i può essere vista come somma di due termini: forza esterna (dovuta ad interazione con particelle che **non fanno parte** del sistema) e forza interna (dovuta ad interazione con particelle che **fanno parte** del sistema)

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i^{(est)} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

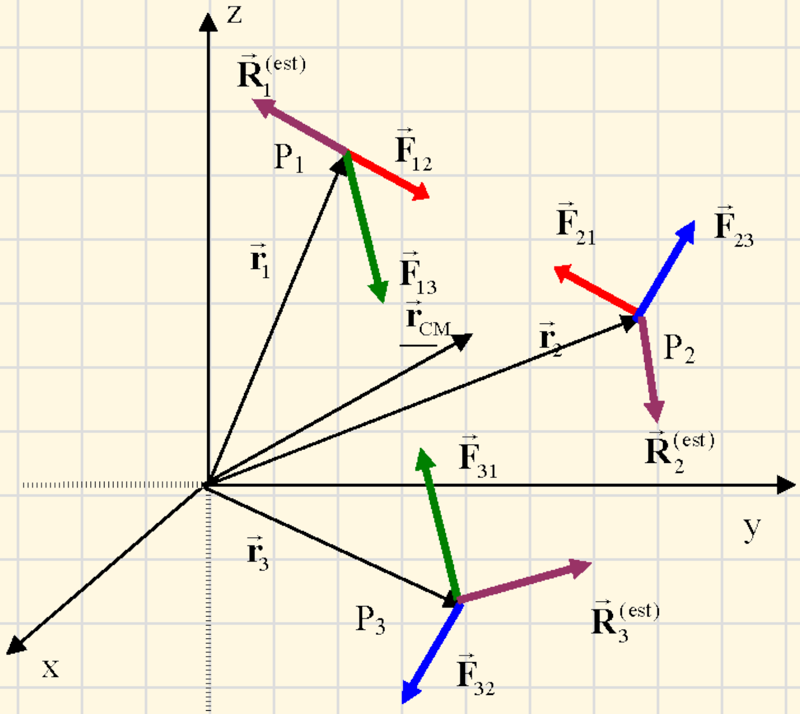
Teorema centro di massa - 2



$$M\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{R}}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\mathbf{R}}_i^{(est)} + \sum_{j\neq i}\vec{\mathbf{f}}_{ij}\right) = \overbrace{\sum_{i=1}^{n}\vec{\mathbf{R}}_i^{(est)}}^{\text{Ris. forze esterne}} + \overbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{\mathbf{f}}_{ij}}^{\text{Ris. forze interne}}}_{\text{perchè in una somma è possibile cambiare l'ordine degli addendi}}$$

- La risultante delle forze interne è sempre nulla in quanto le forze interne sono sempre a coppia e la risultante di ciascuna coppia è nulla

Teorema centro di massa - 3



$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)} = \vec{R}^{(est)}$$

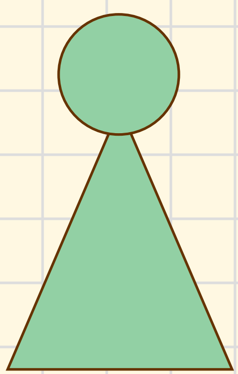
- L'accelerazione del centro di massa è dovuta alle sole forze esterne.
- Il centro di massa si muove come un punto materiale, avente una massa pari alla massa totale del sistema, sottoposto all'azione della risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.

Corpo rigido

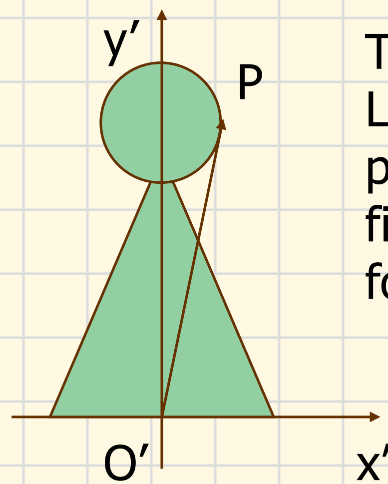
- Si definisce corpo rigido un particolare sistema di punti materiali in cui le distanze, tra due qualunque dei suoi punti, non variano nel tempo per cui un corpo rigido non subisce alcuna deformazione anche se sottoposto a sollecitazioni estremamente elevate. Il corpo rigido conserva la sua forma.
- Il corpo rigido è un’astrazione: in natura non ci saranno mai corpi perfettamente rigidi
- I corpi solidi possono, in prima approssimazione, essere considerati rigidi.
- Ci saranno corpi il cui comportamento, in particolari condizioni, può essere descritto come quello di un corpo rigido.
- Un corpo rigido non può avere moti caratterizzati da una variazione delle dimensioni del corpo stesso (vibrazioni, maree, etc.)

Terna solidale

- E’ una terna di assi cartesiani ortogonali con origine in un particolare punto del corpo rigido che passano per punti fissi del corpo rigido.



corpo rigido



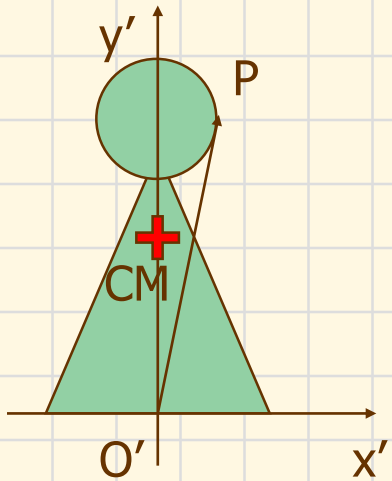
Terna solidale
L’asse z’ è perpendicolare alla figura uscente dal foglio.

Terna solidale

- Ogni punto del corpo rigido (per definizione di corpo rigido) occupa una posizione fissa in questa terna.

- Sfruttando la terna solidale, per descrivere il moto di un corpo rigido (CR) si può procedere come segue:
- Si determinala posizione di tutti i punti del CR all'istante di tempo iniziale t_o rispetto alla terna solidale (questa posizione è costante in modulo direzione e verso)
- Si determina la posizione della terna solidale in un istante successivo t
- Utilizzando la posizione di ciascun punto del CR rispetto alla terna solidale determinata all'istante iniziale, si può determinare la posizione di ciascun punto all'istante t.

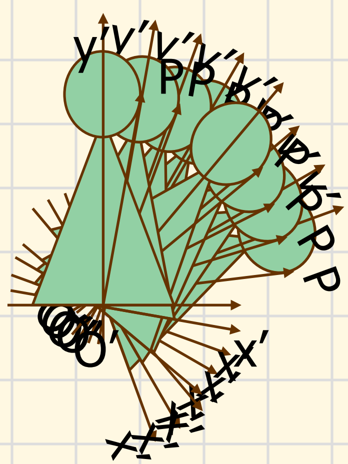
Moto corpo rigido: traslazione

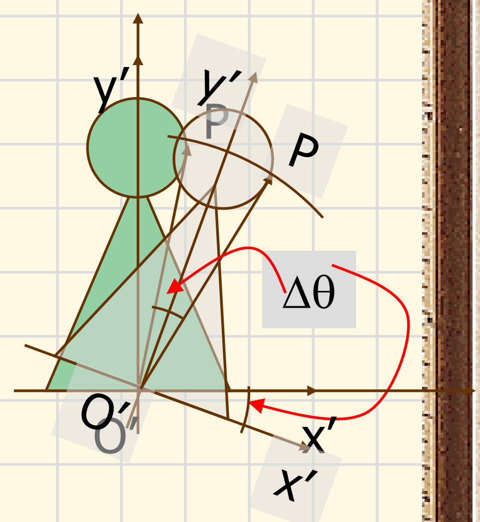


- L'orientamento degli assi della terna solidale rimane costante (gli assi si muovono mantenendosi paralleli a se stessi)
- Tutti i punti del corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo che è lo stesso di quello subito dal centro di massa per cui tutti i punti sono fermi rispetto al centro di massa
- È sufficiente determinare il moto del centro di massa

Moto corpo rigido: rotazione

- L’orientamento degli assi della terna solidale non rimane costante; esiste un insieme di punti, allineati su una retta, che rimangono fermi. Tale insieme di punti definisce l’asse di rotazione (asse fisso)
- Tutti i punti si muovono su traiettorie circolari attorno ad un punto dell’asse di rotazione su un piano perpendicolare all’asse di rotazione
- Tutti i punti subiscono lo stesso spostamento angolare nello stesso intervallo di tempo e si muovono con la stessa velocità ed accelerazione angolare rispetto all’asse di rotazione





Moto corpo rigido: rotazione

- La velocità di ciascun punto è tangente alla traiettoria circolare

- Il modulo della velocità è proporzionale alla distanza del punto considerato dall'asse di rotazione

$$v=|\omega|R$$

- L'accelerazione tangenziale è proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione

$$a_t=\alpha R$$

- L'accelerazione centripeta è proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione

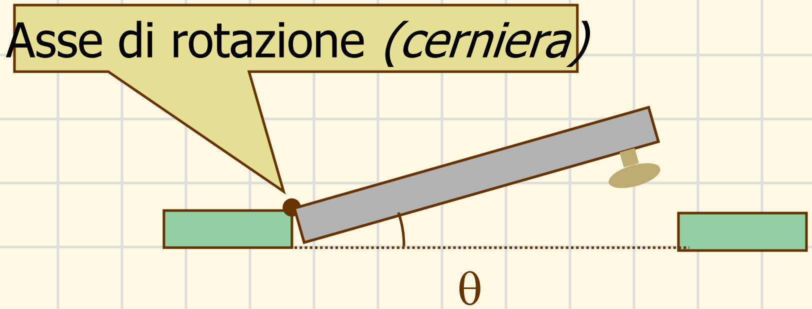
$$a_t=\omega^2 R$$

Moto corpo rigido: rototraslazione

- In generale il moto di un corpo rigido sarà la composizione di un moto di traslazione e di un moto di rotazione per il quale, però, l'asse di rotazione può cambiare anche in orientazione

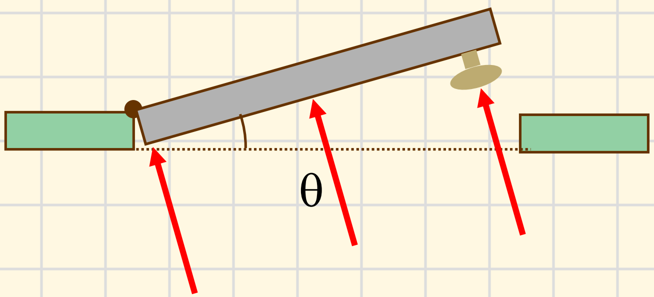
- Un moto comunque complesso può sempre essere immaginato come la sovrapposizione del moto del centro di massa Più un moto di rotazione attorno al centro di massa

Rotazione pura di un corpo rigido



- Facendo riferimento alla figura (anta di una porta), è possibile determinare la posizione del CR con la sola conoscenza dell'angolo θ
- Nel caso di un CR che ruoti attorno ad un asse fisso è sufficiente una sola equazione scalare per determinare il suo moto (si dice che il CR ha un solo grado di libertà)
- Cerchiamo di scoprire che relazione esiste tra le forze applicate al CR e l'accelerazione (angolare) prodotta sul CR

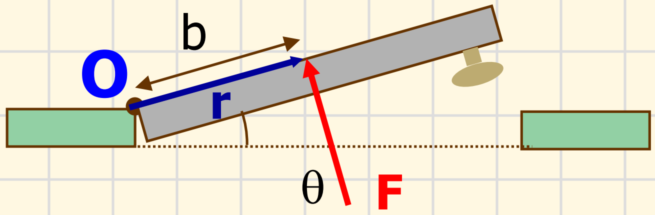
Rotazione pura di un corpo rigido



- Supponiamo di applicare forze perpendicolari al piano della porta:
- Se applichiamo una forza a distanza nulla d'asse di rotazione l'effetto è nullo: non c'è nessun moto
- Man mano che ci allontaniamo dall'asse di rotazione, a parità di forza, l'effetto (l'accelerazione angolare della porta) è sempre più vistoso (ecco perché la maniglia si mette il più lontano possibile dalle cerniere)

- **Nel caso della rotazione la forza non è direttamente responsabile dell'effetto prodotto.**

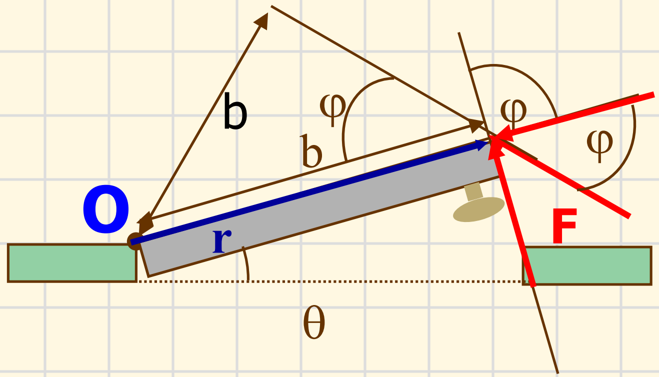
Rotazione pura di un corpo rigido



- L'effetto (ovvero l'accelerazione angolare prodotta) dipende dalla distanza ortogonale della retta di azione della forza dall'asse di rotazione; tale distanza prende il nome di braccio
- Il prodotto della forza per il braccio della forza stessa prende il nome di momento della forza e da quest'ultimo dipende l'effetto della (ovvero l'accelerazione angolare prodotta).
- Il momento della forza è una grandezza vettoriale definita come prodotto vettoriale della forza per il vettore posizione del punto di applicazione della forza; il modulo del momento varrà, quindi:

$$\left|\vec{\mathbf{M}}_o\right| = \left|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right| = Fr\mathrm{sen}\varphi = Fb$$

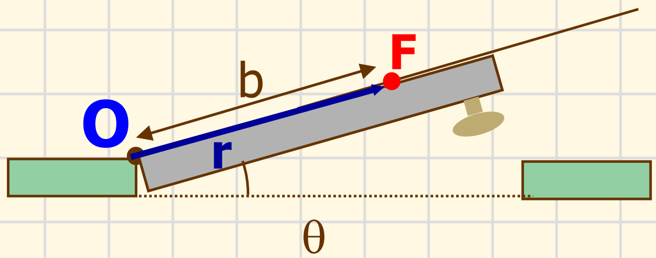
Rotazione pura di un corpo rigido



- Facendo variare l'angolo φ della forza rispetto al vettore posizione mantenendo la forza nel piano perpendicolare all'asse di rotazione
- L'effetto è maggiore quando l'angolo φ è 90° mentre è nullo quando φ è 0° o 180°
- Questa osservazione ci conferma che la causa delle rotazioni è il momento della forza e che esso è una grandezza vettoriale definita come prodotto vettoriale prodotto vettoriale della forza per il vettore posizione del punto di applicazione della forza; il cui modulo vale:

$$\left|\vec{\mathbf{M}}_o\right| = \left|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right| = Fr\,\text{sen}\varphi = Fb$$

Rotazione pura di un corpo rigido



- Se consideriamo una forza perpendicolare al vettore posizione **r** ma appartenente al piano della porta, il modulo del momento varrà sempre, come nel caso in cui la forza era perpendicolare al piano della forza:

$$\left|\vec{\mathbf{M}}_o\right| = \left|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right| = Fr\text{sen}\varphi = Fb$$

  Ora, però, la direzione del momento è perpendicolare all'asse di rotazione mentre prima era parallelo ad esso.
- Si può concludere, quindi, che il moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso dipende dalla componente del momento della forza lungo l'asse di rotazione (Momento assiale)

Equilibrio di un corpo rigido nel piano

- Combinando le nozioni fino ad ora acquisite possiamo desumere, con riferimento al moto piano:
- se la risultante delle forze agenti su un corpo rigido è nulla ed il corpo rigido si trova in equilibrio rispetto alla traslazione, tale equilibrio si mantiene
- se il momento assiale delle forze agenti è nullo ed il corpo rigido si trova in equilibrio rispetto alla rotazione, tale equilibrio si mantiene
- Quindi, affinché il corpo rigido mantenga il proprio equilibrio alla traslazione e alla rotazione nel piano è necessario e sufficiente che la risultante delle forze su esso agenti sia nulla e la risultante dei momenti di queste forze sia nulla