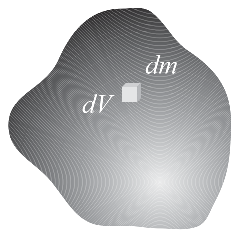
DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Per corpo rigido si intende un sistema di punti materiali caratterizzati dal fatto che le loro mutue distanze si mantengono costanti nel tempo, indipendentemente dalle eventuali sollecitazioni a cui è soggetto il sistema. Sebbene tale sistema costituisca un'astrazione, esistono numerosi casi pratici che soddisfano le proprietà di un corpo rigido in corrispondenza di piccole sollecitazioni.

Per i sistemi costituiti da un numero molto grande di punti, come nel caso dei corpi solidi, risulta opportuno introdurre una grandezza che caratterizzi la distribuzione delle masse nel corpo. Consideriamo un elemento di volume infinitesimo dV del corpo e sia dm la massa contenuta in tale volume; si definisce *densità* del corpo la quantità:

$$\rho \equiv \frac{dm}{dV},$$



dove il volume dV deve essere sufficientemente grande da contenere un numero elevato di molecole costituenti il corpo, ma abbastanza piccolo perché le proprietà del corpo si possano ritenere praticamente uniformi in esso. Dalla precedente definizione segue che la massa m del corpo può esprimersi come:

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho dV .$$

In particolare se ρ è uniforme la massa m vale $\rho\mathcal{V}$ e pertanto:

$$\rho = \frac{m}{\mathcal{V}}.$$

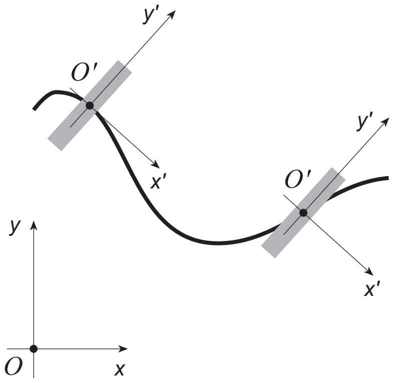
Le dimensioni della densità sono il rapporto tra una massa ed un volume e nel sistema *SI* si misura in kg/m^3.

1 Moto di un corpo rigido

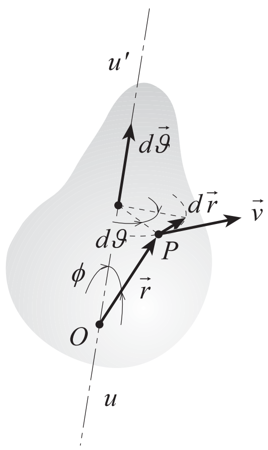
Trattandosi di un corpo esteso, il moto di un corpo rigido è determinato dalle forze esterne che agiscono su di esso e sono, in generale, applicate in punti diversi del corpo. L'insieme delle forze agenti è caratterizzato da una forza risultante $\vec{F}^{(ext)}$ e da un momento risultante $\vec{\tau}^{(ext)}$ indipendenti tra loro. Inoltre, mantenendosi invariate le mutue distanze tra le particelle che lo compongono, il lavoro delle forze interne al corpo rigido è nullo, per cui è solo il lavoro delle forze esterne a produrre la variazione dell'energia cinetica del corpo rigido. Pertanto, in quest'ambito di studio, non è necessario distinguere le forze interne da quelle esterne, essendo solo queste ultime a determinare la dinamica del corpo rigido e si farà a meno dell'indicazione "ext" in corrispondenza dei vettori che stabiliscono la dinamica del corpo.

Si definisce *moto rigido* di un sistema di punti, un moto durante il quale resta invariata la distanza tra le coppie di punti che lo costituiscono. Gli spostamenti rigidi elementari sono la traslazione e la rotazione.

Per *traslazione* di un corpo rigido si intende il moto rigido che lascia invariata la terna *O'x'y'z'* solidale al corpo rispetto a quella di un riferimento fisso *Oxyz*. Ne segue che il vettore spostamento è lo stesso per ogni punto del corpo e di conseguenza la velocità e l'accelerazione di tutti i punti sono le stesse ad ogni istante. Lo studio di questo moto può pertanto ricondursi allo studio del moto di un qualsiasi punto del sistema o, eventualmente, al moto del centro di massa, anche se tale punto non appartiene fisicamente al sistema ma, comunque, si mantiene fisso rispetto ad esso.



Per *rotazione* di un corpo rigido si intende il moto che lascia invariata la posizione dei punti di una retta, denominata *asse di rotazione*. In tale caso lo spostamento subito dal generico punto P del sistema dipende dalla sua distanza dall'asse di rotazione uu' . Se quest'asse è fisso, la traiettoria di P sarà un arco di circonferenza ortogonale all'asse di rotazione e di raggio pari alla distanza del punto dall'asse. Se la posizione di P è riferita ad un punto O dell'asse uu' mediante il vettore di posizione $\vec{r}$, lo spostamento infinitesimo $d\vec{r}$, determinato da una rotazione di vettore[1] $d\vec{\vartheta}$ è:



$$d\vec{r} = d\vec{\vartheta} \times \vec{r}$$

così, introdotta la velocità angolare $\vec{\omega}$ pari a $d\vec{\vartheta}/dt$, la velocità del punto si scrive:

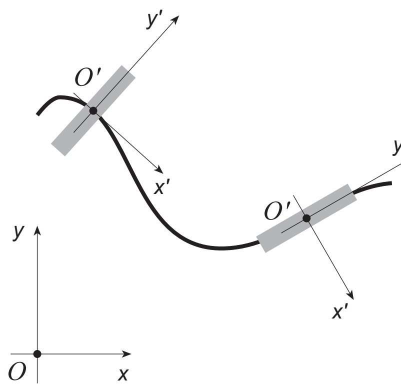
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

e introdotta l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ pari a $d\vec{\omega}/dt$, l'accelerazione del punto si scrive:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right),$$

in cui $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ è l'accelerazione tangenziale e $\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$ è l'accelerazione centripeta di modulo $\omega^2 r \sin\phi$, dove ϕ è l'angolo tra la direzione dell'asse uu' e quella del vettore $\vec{r}$.

Se si considera il moto rigido di un corpo rispetto ad un riferimento fisso *Oxyz*, detto *O'x'y'z'* un sistema di riferimento con origine nel punto O' del corpo ed appartenente all'asse, non fisso, di rotazione, per la legge di composizione delle velocità la velocità $\vec{v}$ di un generico punto di posizione $\vec{r}$ rispetto ad O' vale:



$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' ,$$

---

[1] Il vettore $d\vec{\vartheta}$ associato alla rotazione è un vettore di modulo pari allo spostamento angolare infinitesimo $d\vartheta$, direzione coincidente con l'asse di rotazione e verso determinato dal senso di rotazione in base alla regola della mano destra.

cioè lo spostamento elementare $\vec{v}\,dt$ che caratterizza ciascun punto del corpo è composto da una traslazione con velocità $\vec{v}_{O'}$ ed una rotazione di velocità angolare $\vec{\omega}$.

Le equazioni che descrivono il moto di un corpo rigido sono:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau},$$

dove $\vec{p}$ ed $\vec{L}$ rappresentano, rispettivamente, la quantità di moto totale del sistema ed il suo momento angolare totale, mentre $\vec{F}$ è la risultante delle forze esterne, e $\vec{\tau}$ è il momento risultante delle forze esterne. Sia $\vec{L}$ che $\vec{\tau}$ sono riferiti allo stesso polo, generalmente il centro di massa, che può essere fisso oppure in moto rispetto ad un opportuno sistema di riferimento inerziale. Se la massa del corpo è costante:

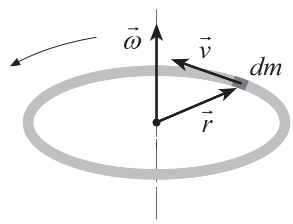
$$m\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{F},$$

dove $\vec{v}_{CM}$ è la velocità del centro di massa.

Esempio: Stabiliamo il momento angolare di un anello sottile omogeneo di massa m e raggio R, che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno ad un asse passante per il centro dell'anello e perpendicolare al suo piano. L'espressione del momento angolare nel caso discreto:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i),$$

viene generalizzata al caso continuo identificando la massa m_i con l'elemento infinitesimo di massa dm dell'anello. Se $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono, rispettivamente, il vettore posizione e la velocità di dm rispetto ad un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro dell'anello, il momento angolare si scrive:



$$\vec{L} = \int_m \vec{r} \times \vec{v}\; dm';$$

i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono perpendicolari tra loro, così $\vec{L}$ è diretto lungo l'asse; inoltre, per ciascun elemento dm il modulo dei vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ è costante e in particolare risulta:

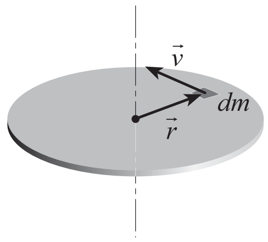
$$r = R,$$
$$v = r\omega = R\omega$$

così, il modulo del momento angolare, vale:

$$L = \int_m RR\omega\, dm' = R^2\omega \int_m dm' = mR^2\omega.$$

La quantità mR^2 è una proprietà dell'anello relativa al particolare asse di rotazione scelto. Vettorialmente la relazione precedente si esprime:

$$\vec{L} = mR^2\vec{\omega}.$$



Esempio: Valutiamo il momento angolare di un disco sottile omogeneo che ruota nelle stesse condizioni del precedente esempio. Sia R il suo raggio ed m la sua massa. In tali condizioni, il momento angolare elementare dL dell'elemento dm del disco vale:

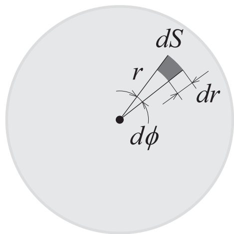
$$dL = rv\,dm\,,$$

dove r e v sono, rispettivamente, la distanza dall'asse e la velocità dell'elemento dm. Quindi, siccome $v = r\omega$, si ha:

$$dL = rvdm = rr\omega dm = \omega r^2 dm = \omega r^2 \sigma dS\,,$$

dove σ è la densità superficiale del disco, pari a:

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2}\,.$$



L'elemento di superficie dS può esprimersi come:

$$dS = rd\phi dr\,,$$

così, sostituendo:

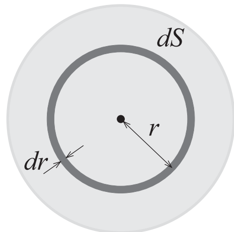
$$dL = \omega r^2 \sigma r d\phi dr = \omega\sigma r^3 d\phi dr\,.$$

Integrando questa espressione si ha:

$$L = \int_S \omega r^2 \sigma dS = \int_0^{2\pi}\int_0^R \omega\sigma r^3 d\phi dr = \int_0^{2\pi} d\phi \int_o^R \omega\sigma r^3 dr = 2\pi\omega\sigma \int_o^R r^3 dr = 2\pi\omega\sigma \frac{1}{4} R^4 = \frac{\pi\omega}{2}\sigma R^4 = \frac{\pi\omega}{2}\frac{m}{\pi R^2} R^4 =$$
$$= \frac{1}{2} m R^2 \omega.$$

Lo stesso risultato poteva conseguirsi a partire da quanto ottenuto nell'esempio precedente, considerando il disco come composto da infiniti anelli di massa dm. Il momento angolare di ciascun anello è:

$$dL = dm\, r^2 \omega\,,$$



dove dm può esprimersi tramite la densità superficiale σ come:

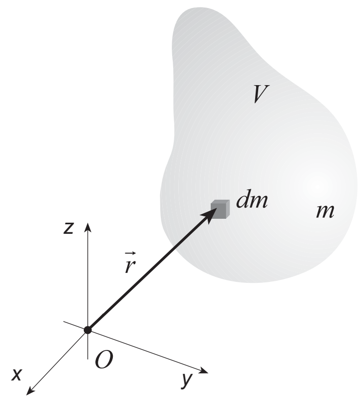
$$dm = 2\pi r\sigma\, dr$$

così, sostituendo, si ottiene:

$$dL = 2\pi r \sigma r^2 \omega\, dr = 2\pi\sigma r^3 \omega\, dr\,,$$

che porta a quanto già trovato.

2 Centro di massa di un corpo continuo



Consideriamo un corpo rigido di massa m e densità ρ. Estendendo a tale corpo la definizione di centro di massa per un sistema di punti materiali, possiamo esprimere tale grandezza come la somma di infiniti vettori $\vec{r}\, dm$ associati all'elemento infinitesimo di massa dm rispetto ad un opportuno sistema di riferimento, divisa per la massa m.

Pertanto:

$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{\int_m \vec{r}\, dm'}{\int_m dm'} = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\,\rho\, dV$$

essendo dm pari a ρdV. Se il corpo è omogeneo, ovvero se ρ è indipendente dalla posizione, la posizione del centro di massa non dipende dalla massa del corpo ma solo dalla sua forma, ciò in quanto $\vec{r}_{CM}$ è la media del vettore $\vec{r}$ calcolata sul volume $\mathcal{V}$ del corpo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\,\rho\, dV = \frac{\rho}{m}\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\, dV\,,$$

essendo ρ uniforme. Così, ad esempio, per una sbarretta omogenea il centro di massa è situato nel punto medio. Inoltre, per un corpo omogeneo simmetrico rispetto ad un punto, un asse o un piano, il centro di massa coincide con il centro di simmetria o è un punto del piano o dell'asse di simmetria. Infine, se esistono più assi o piani di simmetria, il centro di massa è situato sulla loro intersezione. Ad esempio, in un triangolo ci sono tre assi di simmetria costituiti dalle tre mediane, così il centro di massa è situato all'intersezione di questi tre assi.

Esempio: Consideriamo una sbarretta omogenea di lunghezza l, sezione a e densità lineare λ. La massa di tale corpo vale, quindi:

$$m = \lambda l\,;$$

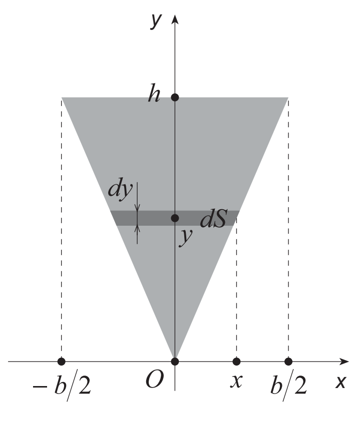
l'elemento di massa dm si scrive:

$$dm = \lambda\, dx\,,$$

così:

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int_m x\, dm' = \frac{1}{\lambda l}\int_0^l x\lambda\, dx = \frac{1}{l}\int_0^l x\, dx = \frac{1}{l}\frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}$$

cioè, in accordo con quanto anticipato, il centro di massa della sbarretta è situato nel suo punto medio.



Esempio: Consideriamo una lamina triangolare omogenea di massa m, altezza h e base b. La densità superficiale vale:

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{2m}{bh}\,,$$

dove S è la superficie del triangolo. Dalla geometria del sistema segue che l'ordinata y dell'elemento di superficie dS vale:

$$y = \frac{2h}{b}x\,,$$

così l'elemento dm si scrive:

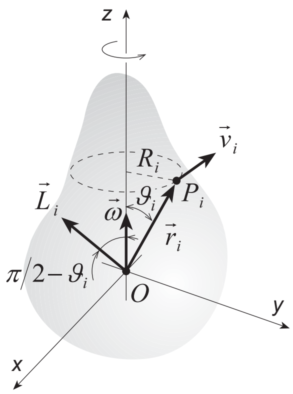
$$dm = \sigma dS = \sigma 2x dy = \sigma 2\left(\frac{b}{2h}y\right)dy = \frac{\sigma b}{h}y dy\,,$$

e l'ordinata y_{CM} del centro di massa vale:

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\int_m y dm' = \frac{2}{\sigma bh}\int_S y dS' = \frac{2}{bh}\int_0^h y\frac{b}{h} y dy = \frac{2}{h^2}\int_0^h y^2 dy = \frac{2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{2}{3}h\,;$$

ovviamente risulta $x_{CM} = 0$.

3 Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso



Consideriamo un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale. Siccome i punti dell'asse sono fissi, conviene adoperarli per il calcolo dei momenti; consideriamo quindi un sistema di riferimento inerziale con l'asse *z* coincidente con l'asse di rotazione, in modo che il versore $\hat{z}$ valga $\vec{\omega}/\omega$. Il momento angolare di un generico punto P_i del corpo è:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i);$$

tale vettore è ortogonale al piano definito da $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$ e la sua direzione forma con l'asse *z* un angolo pari a $\pi/2 - \vartheta_i$, dove ϑ_i è l'angolo compreso tra la direzione di $\vec{r}_i$ e quella dell'asse *z*. L'angolo tra le direzioni dei vettori $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$ è di $\pi/2$, inoltre il vettore $\vec{v}_i$ può esprimersi attraverso la velocità angolare come $\vec{\omega}\times\vec{r}_i$ per cui in modulo vale $\omega r_i \sin\vartheta_i = R_i\omega$, dove

$$R_i \equiv r_i \sin\vartheta_i$$

è la proiezione di $\vec{r}_i$ perpendicolarmente all'asse *z*, pari a $\left(x_i^2 + y_i^2\right)^{1/2}$. La proiezione del momento angolare $\vec{L}_i$ lungo l'asse di rotazione è detta *momento angolare assiale* e si esprime come:

$$L_{i\,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_i\right) = L_i \sin\vartheta_i = m_i r_i \sin\vartheta_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega.$$

Pertanto il momento angolare assiale totale del corpo è dato da:

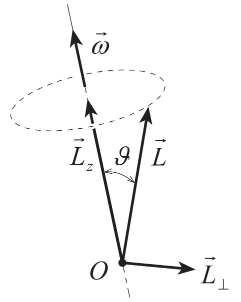
$$L_z = \sum_i L_{i\,z} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega = I_z \omega, \tag{1}$$

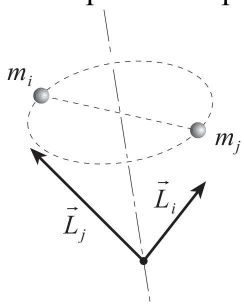
dove la grandezza

$$I_z \equiv \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \tag{2}$$

prende il nome di momento di inerzia del corpo rispetto all'asse *z*. Tale quantità, che esprime la relazione di proporzionalità tra il momento angolare assiale e la velocità angolare dipende sia dalla massa m_i dei singoli punti che dalla loro distanza R_i dall'asse di rotazione.

In generale, il vettore momento angolare del corpo rigido $\vec{L}$ non è parallelo al vettore $\vec{\omega}$ ma è caratterizzato da un moto in cui l'estremo libero ruota attorno alla direzione di $\vec{\omega}$, ossia $\vec{L}$ compie un *moto di precessione*. La componente parallela all'asse di rotazione è diretta come $\vec{\omega}$ e può variare solo in modulo e non dipende dal polo scelto; la componente perpendicolare all'asse di rotazione varia in direzione, può variare in modulo, dipende dalla scelta del polo e in modulo vale $L_i \cos\vartheta_i = m r_i R_i \omega \cos\vartheta_i$.

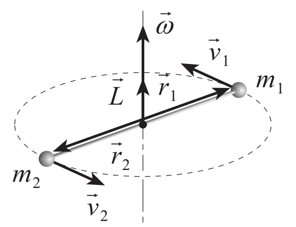




Quando il corpo presenta un asse di simmetria e la rotazione avviene attorno a tale asse, per ogni elemento del corpo il corrispondente vettore $\vec{L}_i$ ha un vettore simmetrico $\vec{L}_j$, associato all'elemento diametralmente opposto a quello dato rispetto l'asse. In questo caso il vettore momento angolare del corpo è orientato lungo l'asse di rotazione e pertanto risulta parallelo a $\vec{\omega}$. Si può dimostrare che per ogni corpo, indipendentemente dalla forma, esistono tre direzioni mutuamente perpendicolari tali che il momento angolare è parallelo all'asse di rotazione. Queste direzioni sono denominate *assi principali di inerzia* ed i corrispondenti momenti d'inerzia sono detti *momenti principali d'inerzia*. Gli assi principali coincidono con alcuni degli assi di simmetria qualora il corpo possieda qualche simmetria. Ad esempio, in una sfera tutti gli assi passanti per il centro sono assi principali o in un corpo a simmetria cilindrica, sono assi principali l'asse di simmetria e tutti gli assi ad esso perpendicolari. La relazione scalare (1), nel caso di rotazioni intorno ad un asse principale, può essere espressa nella forma vettoriale

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{3}$$

in cui I è il corrispondente momento principale d'inerzia. In questa circostanza, se $\vec{L}$ è variabile la derivata $d\vec{L}/dt$ è parallela a $\vec{\omega}$ e, siccome tale derivata è uguale al momento delle forze esterne $\vec{\tau}$ che causa la variazione di $\vec{L}$, il momento $\vec{\tau}$ è diretto come il vettore $\vec{\omega}$. Se invece $\vec{L}$ è costante anche $\vec{\omega}$ lo è; naturalmente, nel caso reale sul sistema agisce un momento d'attrito che tende ad annullare la rotazione per cui, affinché $\vec{L}$ resti costante è necessario che sul sistema agisca un momento uguale ed opposto a quello determinato dalle forze d'attrito.



Esempio: Consideriamo il sistema di figura in cui due sfere uguali di massa m sono collegate da un'asta rigida di lunghezza $2R$. Supponiamo che inizialmente il sistema ruoti attorno ad un asse passante per il punto medio le sfere r perpendicolare all'asta rigida con velocità angolare $\vec{\omega}$. Il momento angolare di ciascuna sfera vale:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times (m_1 \vec{v}_1),$$
$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times (m_2 \vec{v}_2);$$

questi vettori sono uguali così, siccome $\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1$, si ha:

$$\vec{L} = 2\vec{L}_1 = 2\vec{r}_1 \times (m_1 \vec{v}_1) = 2m\,\vec{r}_1 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) = 2m\left[(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1)\vec{\omega} - (\vec{r}_1 \cdot \vec{\omega})\vec{r}_1\right] = 2mR^2\vec{\omega},$$

essendo $\vec{r}_1 \cdot \vec{\omega} = 0$ poiché $\vec{r}_1$ è perpendicolare a $\vec{\omega}$; quindi il momento angolare è un vettore di modulo pari a $2mR^2\omega$ e parallelo alla velocità angolare, ovvero il sistema ruota attorno ad un asse principale ed il momento d'inerzia vale $2mR^2$. Supponiamo che il sistema sia modificato in modo che l'asta formi un angolo ϑ con l'asse di rotazione. In questo caso il momento angolare del sistema diventa:

$$\vec{L} = 2\vec{L}_1 = 2\vec{r}_1 \times (m_1\vec{v}_1) = 2m\,\vec{r}_1 \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_1) = 2m\left[(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1)\vec{\omega} - (\vec{r}_1\cdot\vec{\omega})\vec{r}_1\right] =$$
$$= 2mR^2\,\vec{\omega} - 2mR\omega\cos\vartheta\,\vec{r}_1\ ;$$

in tale circostanza, siccome i vettori $\vec{r}_1$ e $\vec{\omega}$ non sono perpendicolari ($\vartheta \neq \pi/2$), il secondo addendo di questa espressione non è nullo per cui $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ non risultano paralleli. Il modulo del momento angolare totale può essere dedotto dalla relazione precedente, essendo:

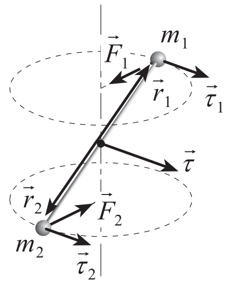
$$L = \sqrt{(2mR^2)^2\,|\vec{\omega}|^2 - (2mR\omega\cos\vartheta)^2\,|\vec{r}_1|^2} = \sqrt{(2mR^2\omega)^2\,(1-\cos^2\vartheta)} = 2mR^2\omega\sin\vartheta\,,$$

che coincide col valore precedente se $\vartheta = \pi/2$. Il fatto che $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ non sono paralleli indica che la rotazione non avviene attorno ad un asse principale. In questo caso la componente di $\vec{L}$ nella direzione di $\vec{\omega}$ (asse *z*) ha modulo:

$$L_z = L\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = L\sin\vartheta = 2mR^2\omega\sin^2\vartheta$$

così, indicato con I_z il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse *z*, risulta:

$$I_z = 2mR^2\sin^2\vartheta.$$

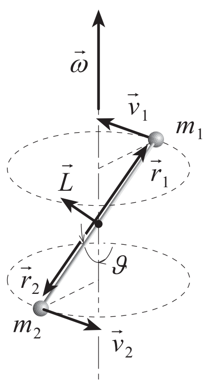


Nel moto di rotazione delle due sfere, in questo secondo caso il momento angolare precede attorno alla direzione del vettore $\vec{\omega}$ e, a differenza del caso precedente, non è costante.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}\,,$$

ciò implica che sul sistema agisce un momento $\vec{\tau}$. Su ciascuna massa sono presenti sia la forza peso che la forza centripeta, tuttavia la prima determina un momento totale nullo, così il momento $\vec{\tau}$ è originato dalle sole forze centripete. Questo vettore è diretto perpendicolarmente all'asse di rotazione, il suo estremo libero descrive una traiettoria circolare se $\vec{\omega}$ è costante e il suo modulo vale $2mr_1^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta$. L'effetto di tale momento è quello di mantenere fisso l'asse di rotazione, cioè la direzione di $\vec{\omega}$, pertanto il sistema che garantisce questo tipo di moto deve essere in grado di fornire questo momento, ovvero il supporto dell'asta deve poter resistere alla sollecitazione determinata da $\vec{\tau}$. Ad esempio, per evitare questa sollecitazione le ruote delle automobili richiedono una equilibratura che fa sì che l'asse di rotazione coincida con un asse principale d'inerzia. Ovviamente se il sistema fosse in quiete esso sarebbe in equilibrio purché la reazione del vincolo sia esattamente uguale e contraria al peso; ciò spiega perché l'equilibratura delle ruote delle automobili va fatta quando le ruote sono in movimento. Se, ad esempio, il supporto che mantiene inclinata l'asta viene a rompersi, ossia il sistema cessa di fornire il momento $\vec{\tau}$, il momento angolare diviene costante e il sistema si pone in rotazione intorno ad un asse perpendicolare all'asta, come nel caso precedente. Decomponendo il momento angolare $\vec{L}$ come:

$$\vec{L} = \vec{L}_z + \vec{L}_\perp\,,$$



segue:

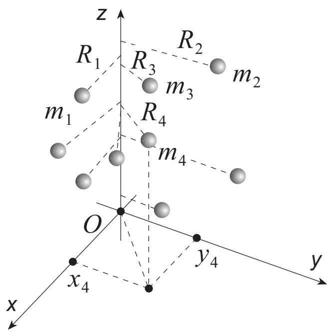
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_z}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt}\ ;$$

d'altra parte, siccome $\vec{L}_z$ è costante, risulta $d\vec{L}_z/dt = \vec{0}$, così:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt}$$

dove $\vec{L}_\perp$ ha il modulo costante e pari a $mR^2\omega\sin\vartheta\cos\vartheta$ e l'estremo libero in rotazione attorno all'asse *z*.

4 Calcolo del momento d'inerzia

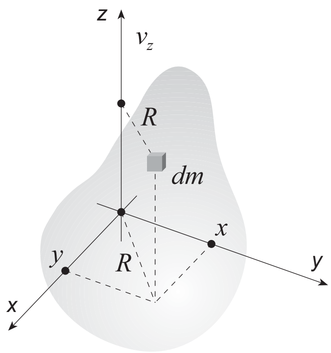


Il momento d'inerzia rispetto ad un'asse (asse z) di un sistema di punti materiali $m_1, m_2, ..., m_n$, posti alle distanze $R_1, R_2, ..., R_n$ dall'asse è dato dalla relazione (2) $\sum_i m_i R_i^2$, attraverso la quale è possibile dedurre che tale grandezza, calcolata rispetto ad un'asse di un corpo, fornisce una misura di quanta massa del corpo dista dall'asse. Consideriamo un corpo continuo di densità ρ, volume $\mathcal{V}$ e massa m; il contributo di un elemento dm del corpo al calcolo del momento d'inerzia rispetto ad un asse (asse z) è $R^2 dm$, dove R è la distanza dell'elemento dall'asse. D'altra parte la massa dell'elemento dm è pari a ρdV, così il momento d'inerzia del corpo continuo può esprimersi come:

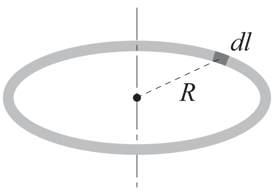
$$I = \int_m R^2 d\mu = \int_{\mathcal{V}} R^2 \rho dV$$

e, poiché $R^2 = x^2 + y^2$, si ha anche:

$$I = \int_{\mathcal{V}} \left(x^2 + y^2 \right) \rho dV .$$



Dal fatto che il momento d'inerzia viene definito attraverso sommatorie o integrali segue che si tratta di una grandezza additiva, pertanto, se il corpo risulta costituito da più parti, il momento d'inerzia totale rispetto ad un'asse è pari alla somma dei momenti d'inerzia parziali, calcolati tutti rispetto allo stesso asse. Fissato un asse, il calcolo del momento di inerzia di un corpo procede in maniera analoga a quanto visto relativamente al centro di massa.

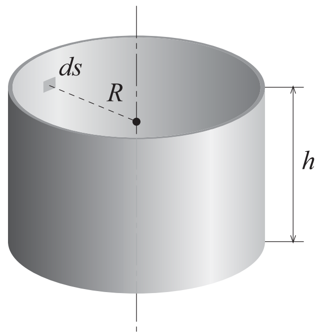


Esempio: Consideriamo un anello sottile di raggio *R* e massa *m*. Se λ rappresenta la densità lineare dell'anello, pari a:

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R},$$

l'elemento infinitesimo di massa dm può esprimersi come $\lambda \, dl$, pertanto il momento di inerzia dell'anello rispetto ad un asse passante per il suo centro e perpendicolare al suo piano è:

$$I = \int_m R^2 \, d\mu = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda \, dl = 2\pi R \, R^2 \lambda = 2\pi R^3 \frac{m}{2\pi R} = mR^2.$$



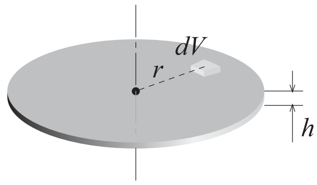
Esempio: Consideriamo un guscio cilindrico sottile di raggio *R*, altezza *h* e massa *m*. Se σ rappresenta la densità superficiale del guscio, pari a:

$$\sigma = \frac{m}{2\pi Rh},$$

l'elemento infinitesimo di massa dm può esprimesi come $\sigma \, ds$, pertanto il momento di inerzia del guscio rispetto al suo asse è:

$$I = \int_m R^2\, d\mu = \int_S R^2 \sigma\, ds = 2\pi R h\, R^2 \sigma = 2\pi R^3 h \frac{m}{2\pi R h} = mR^2 .$$

Esempio: Consideriamo un disco omogeneo di raggio *R*, spessore *h* e massa *m*. La densità (volumetrica) vale:

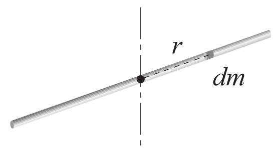


$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h},$$

così l'elemento infinitesimo di massa dm del disco può esprimersi come $\rho\, dV$ e pertanto il momento di inerzia del disco rispetto al suo asse è:

$$I = \int_m R^2\, d\mu = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 h\, d\phi\, r\, dr\, \rho = h\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3\, dr = h\rho 2\pi \frac{R^4}{4} = h\frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2 . \qquad (4)$$

Esempio: Consideriamo un'asta sottile di lunghezza *d* e massa *m*. La densità lineare λ dell'asta vale m/d, per cui il momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare all'asta e passante per il suo centro vale:



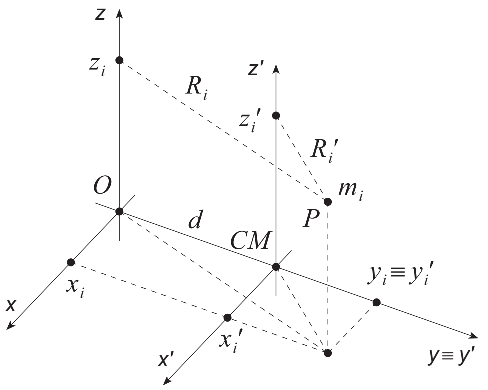
$$I = \int_m R^2\, d\mu = \int_{-d/2}^{d/2} R^2 \lambda\, dR = \lambda\left(\frac{d^3}{24} + \frac{d^3}{24}\right) = \frac{m}{d}\frac{d^3}{12} = \frac{1}{12} md^2. \qquad (5)$$

Nella tabella seguente è indicato il momento di inerzia di alcuni corpi di massa *m*, relativamente a specificati assi.

Corpo	**Asse**	**Momento d'inerzia**
Asta sottile uniforme	Perpendicolare all'asta e passante per un estremo	$m\frac{l^2}{3}$
Asta sottile uniforme	Perpendicolare all'asta e passante per il centro	$m\frac{l^2}{12}$
Foglio rettangolare sottile di lati *a* e *b*	Passante per il centro e perpendicolare a *b*	$m\frac{a^2}{12}$
Foglio rettangolare sottile di lati *a* e *b*	Passante per il centro e perpendicolare al foglio	$m\frac{a^2+b^2}{12}$
Foglio circolare sottile di raggio *R*	Passante per il centro e perpendicolare al foglio	$m\frac{R^2}{2}$
Foglio circolare sottile di raggio *R*	Passante per un qualsiasi diametro	$m\frac{R^2}{4}$
Anello circolare sottile di raggi R_1 e R_2	Passante per il centro e perpendicolare al piano dell'anello	$m\frac{R_1^2+R_2^2}{2}$
Anello circolare sottile di raggi R_1 e R_2	Passante per un qualsiasi diametro	$m\frac{R_1^2+R_2^2}{4}$
Sfera di raggio *R*	Passante per un qualsiasi diametro	$m\frac{2}{5}R^2$
Guscio sferico sottile di raggio medio *R*	Passante per un qualsiasi diametro	$m\frac{2}{3}R^2$
Cilindro circolare retto di raggio *R* e lunghezza *l*	Passante per l'asse longitudinale	$m\frac{R^2}{2}$
Cilindro circolare retto di raggio *R* e lunghezza *l*	Passante per il diametro trasverso	$m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$

5 Teorema di Huygens-Steiner

Il calcolo del momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse può risultare particolarmente complesso qualora l'asse in questione non è un asse di simmetria. Si osservi come, negli esempi precedenti, il calcolo del momento d'inerzia risulta semplice in quanto l'asse passa per il centro di massa dei vari corpi. Tuttavia i momenti di inerzia rispetto ad assi paralleli ad uno passante per il centro di massa sono legati attraverso una formula particolarmente semplice. Consideriamo un corpo di massa m e calcoliamo il momento d'inerzia rispetto ad un asse (z') passante per il centro di massa. Per un elemento di massa m_i del corpo, posto a distanza R_i' dall'asse z', il momento d'inerzia rispetto a tale asse vale $m_i R_i'^2$, ovvero $m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2\right)$ essendo $R_i'^2$ pari a $x_i'^2 + y_i'^2$; pertanto, rispetto al centro di massa il relativo momento d'inerzia del corpo, I_{CM}, vale:



$$I_{CM} = \sum_i m_i R_i'^2 = \sum_i m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2\right). \tag{6}$$

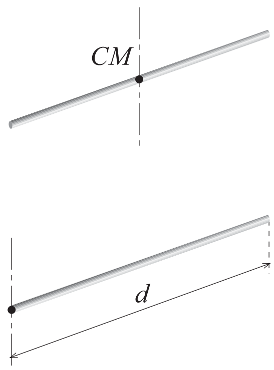
Con riferimento alla figura, il momento d'inerzia rispetto all'asse z, parallelo a z' è dato dalla relazione (2); d'altra parte, poiché y_i può esprimersi come $y_i' + d$, dove d è la distanza dell'origine O del sistema xyz dal centro di massa del corpo e inoltre x_i è uguale a x_i', la relazione (2) può esprimersi come:

$$I = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum_i m_i\left[x_i'^2 + \left(y_i' + d\right)^2\right] = \sum_i m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2 + 2y'd + d^2\right) =$$
$$= \sum_i m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2\right) + 2d\sum_i m_i y_i' + d^2\sum_i m_i .$$

In questa relazione, dalla (7), il primo addendo è il momento d'inerzia rispetto al centro di massa; il secondo addendo è nullo, essendo pari alla coordinata y del centro di massa y_{CM} rispetto al sistema di riferimento del centro di massa; infine l'ultimo addendo vale md^2, pertanto:

$$I = I_{CM} + md^2; \tag{7}$$

da tale risultato, che prende il nome di *teorema di Huygens-Steiner*, segue che una volta noto il momento d'inerzia I_{CM} rispetto ad un asse passante per il centro di massa è possibile ricavare il momento d'inerzia rispetto ad un qualsiasi asse ad esso parallelo. Si noti infine che il momento I è sempre maggiore di I_{CM}.



Esempio: Facendo uso del risultato indicato dalla relazione (5), attraverso l'applicazione del teorema di Huygens-Steiner, è possibile determinare il momento d'inerzia di un'asta sottile rispetto ad un'asse perpendicolare all'asta e passante per un suo estremo. Indicando con I_{CM} il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa, $(1/12)md^2$, dalla (7) segue:

$$I = I_{CM} + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}md^2 + \frac{1}{4}md^2 = \frac{1+3}{12}md^2 = \frac{1}{3}md^2.$$

6 Equazioni del moto di un corpo rigido

Il momento angolare totale di un sistema di particelle e il momento della risultante delle forze agenti su di esso, entrambi calcolati rispetto ad un punto in quiete rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, sono legati tra loro dalla relazione :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \ .$$

La validità di tale espressione si estende ovviamente anche al caso in cui la mutua distanza delle particelle che costituiscono il sistema rimane invariata durante il moto, ovvero se il corpo è rigido. Supponiamo che il corpo rigido sia posto in rotazione attorno ad un asse principale per cui vale la relazione (7), allora sostituendo nella precedente si ottiene:

$$\frac{d\left(I\vec{\omega}\right)}{dt} = \vec{\tau} \ .$$

Se l'asse resta fisso durante il moto, il momento d'inerzia I non varia, per cui:

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}$$

e, indicando con $\vec{\alpha}$ l'accelerazione angolare $d\vec{\omega}/dt$, segue:

$$I\vec{\alpha} = \vec{\tau} \ . \qquad (8)$$

Questa relazione rappresenta l'equazione del moto di rotazione di un corpo rigido. Si noti l'analogia con l'equazione del moto di una particella dove, tuttavia, a differenza di m, I non rappresenta una proprietà intrinseca del corpo ma dipende dalla posizione dell'asse di rotazione. Se $\vec{\tau}$ è nullo il prodotto $I\vec{\omega}$ si mantiene costante e, se I è costante ne segue che anche $\vec{\omega}$ è costante, cioè in assenza di momenti esterni, un corpo rigido che ruota attorno ad un asse principale si muove con velocità angolare costante. Tale proprietà costituisce per il moto rotatorio, un analogo della legge d'inerzia. Si osservi, infine, che in assenza di momenti esterni, se I è variabile $\vec{\omega}$ deve variare in misura tale che il prodotto $I\vec{\omega}$ si mantenga costante; cioè, se ad esempio I aumenta, ω deve diminuire e viceversa.

Qualora il moto non avvenga attorno ad un asse principale vale la relazione (7) in cui l'asse z rappresenta l'asse di rotazione $\left(\hat{z} = \vec{\omega}/\omega\right)$ per cui, dalla proiezione lungo l'asse di rotazione, $dL_z/dt = \tau_z$, segue:

$$\frac{d\left(I_z\omega\right)}{dt} = \tau_z$$

e, se l'orientazione dell'asse è fissa rispetto al corpo in modo che I_z resti costante, si ha:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \,,$$

ovvero

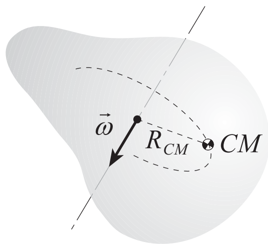
$$I_z \alpha = \tau_z \,,$$

che si distingue dall'espressione (8) in quanto τ_z è la componente del momento totale delle forze esterne nella direzione dell'asse di rotazione e non il momento totale $\vec{\tau}$. In questo caso, l'altra proiezione nella direzione ortogonale all'asse di rotazione

$$\frac{dL_\perp}{dt} = \tau_\perp \,,$$

non provoca alcuna variazione di α ma determina il moto di precessione del vettore $\vec{L}$ già descritto.

Se il centro di massa non è situato sull'asse di rotazione tale punto descrive una circonferenza sul piano perpendicolare all'asse con centro nell'intersezione tra tale piano e l'asse. L'accelerazione del centro di massa vale:



$$\vec{a}_{CM} = R_{CM} \alpha \, \hat{t} + R_{CM} \omega^2 \, \hat{n} \,,$$

dove R_{CM} è la distanza del centro di massa dall'asse di rotazione.

7 Energia cinetica di rotazione

L'energia cinetica per un sistema di particelle vale:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \,,$$

in particolare, per un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse (z) con velocità angolare $\vec{\omega}$, la $i-$esima particella è caratterizzata da una velocità v_i pari a ωR_i, dove R_i è la distanza di tale particella dall'asse. Pertanto:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\omega R_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2$$

così, facendo uso della relazione (2), se I_z è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione, si ha:

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (9)$$

infine, se il momento angolare $\vec{L}$ è parallelo a $\vec{\omega}$, dalla (3) segue:

$$E_k = \frac{L^2}{2I_z},$$

altrimenti vale la sola relazione (1) e quindi $E_k = {}^2L_z/2I_z$.

Dal teorema dell'energia cinetica segue che il lavoro infinitesimo dW che occorre compiere per variare l'energia cinetica del corpo di una quantità dE_k è pari a dE_k stesso, pertanto si ha:

$$dW = dE_k = d\left(\frac{1}{2}I_z\omega^2\right) = I_z\omega\, d\omega = I_z\frac{d\vartheta}{dt}\alpha dt = I_z\alpha d\vartheta = \tau_z d\vartheta;$$

in particolare il lavoro della componente lungo l'asse di rotazione τ_z del momento delle forze esterne $\vec{\tau}$ necessario per ruotare il sistema, da un angolo ϑ_1 ad un angolo ϑ_2 vale:

$$W = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \tau_z d\vartheta.$$

Per il teorema dell'energia cinetica tale lavoro è pari alla variazione di energia cinetica:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}I_z\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_1^2.$$

Se vale la (3) allora $\vec{\tau} = I_z\vec{\alpha}$, per cui dW è pari a $\tau\, d\vartheta$. Infine, se le forze esterne sono conservative il lavoro W può esprimersi come variazione $-\Delta E_p$ dell'energia potenziale totale e l'energia meccanica totale

$$E = \frac{1}{2}I_z\omega^2 + E_p$$

resta costante durante il moto. Se l'asse di rotazione del corpo di massa m è posto a distanza d dal centro di massa, sostituendo l'espressione (7) del teorema di Huygens-Steiner nella relazione (9), si ottiene:

$$E_k = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + md^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega d)^2;$$

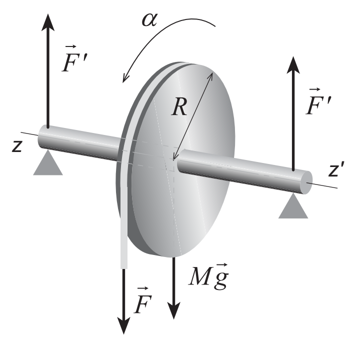
d'altra parte il prodotto ωd è pari alla velocità del centro di massa v_{CM}, pertanto:

$$E_k = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2.$$

Cioè, se il centro di massa non è situato sull'asse di rotazione, ovvero se $d \neq 0$ e quindi $v_{CM} \neq 0$, in accordo col teorema di König l'energia cinetica del sistema è somma dell'energia cinetica E_k' pari a $(1/2)I_{CM}\omega^2$ del moto rispetto al centro di massa e dell'energia cinetica del centro di massa $E_{k\,CM}$ pari a $(1/2)mv_{CM}^2$. Infine, se le forze sono conservative, la quantità:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + E_p ,$$

si mantiene costante.



Esempio: Un disco di raggio pari a $0.5\, m$ e massa di $20\, kg$ può ruotare liberamente attorno ad un asse passante per il suo centro. Stabiliamo l'accelerazione angolare e la velocità angolare dopo $2\, s$ dall'applicazione di una forza di $9.8\, N$, tramite una cinghia avvolta attorno al bordo del disco, supponendo che la velocità angolare iniziale sia nulla. Con riferimento alla figura si osserva che le forze esterne agenti sono la forza di trazione $\vec{F}$, il peso $M\vec{g}$ e le reazioni dei vincoli $\vec{F}'$. Calcolando i momenti rispetto al centro di massa, si trova che solo $\vec{F}$ ha momento $\vec{\tau}$ diverso da zero pertanto, siccome l'asse *zz'* è un asse principale, segue:

$$\tau = I\alpha ,$$

dove il modulo del momento $\vec{\tau}$ vale:

$$\tau = RF$$

e, dalla relazione (4) il momento d'inerzia *I* del disco vale:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 ,$$

così:

$$\alpha = \frac{2F}{MR} \approx 1.96\, rad/s^2 .$$

Dopo $2\, s$ dall'applicazione della forza, siccome $\alpha = d\omega/dt$ e la velocità angolare iniziale è supposta nulla, si ha:

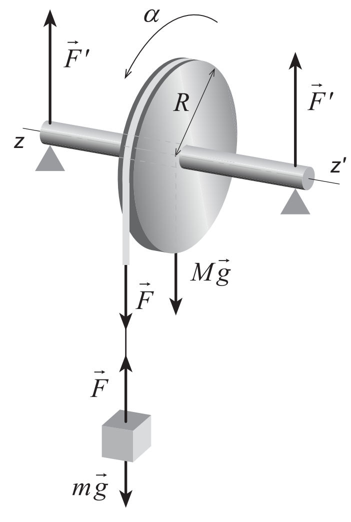
$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt' = \alpha t \approx 3.92\, rad/s .$$

Poiché il centro di massa è fisso la sua accelerazione è nulla pertanto, dal bilancio delle forze agenti sul sistema segue che:

$$2F' - F - mg = 0 ,$$

e quindi

$$F' = \frac{1}{2}(F + Mg) \approx 102.9\, N .$$



Esempio: Nelle stesse condizioni dell'esempio precedente, calcoliamo l'accelerazione angolare del disco nell'ipotesi che alla cinghia sia applicato un corpo di massa *m* pari a $1\, kg$. L'equazione del moto della massa m è:

$$ma = mg - F ,$$

dove $\vec{F}$ è la trazione esercitata sul disco dal corpo e di conseguenza, $-\vec{F}$ è la reazione che il disco esercita sul corpo. L'accelerazione *a* può esprimersi come $R\alpha$; inoltre l'equazione del moto del disco è:

$$I\alpha = \tau,$$

dove $I = (1/2)MR^2$ e $\tau = RF$ così, sostituendo, si ha:

$$mR\alpha = mg - \frac{1}{2}MR\alpha,$$

da cui segue:

$$\alpha = \frac{mg}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)R} \approx 1.80\, rad/s^2.$$

Si noti che, sebbene il peso mg valga $9.8\,N$, l'accelerazione angolare che si ottiene è minore rispetto al precedente risultato. Ciò in quanto il corpo nel suo moto esercita una forza $\vec{F}$ sul disco che, di conseguenza, esercita una forza $\vec{F}$ uguale sul corpo, ma diretta verso l'alto. Siccome il corpo cade con moto accelerato deve risultare:

$$F < mg = 9.8\,N,$$

e quindi il momento agente sul disco è minore. L'accelerazione del corpo verso il basso ha modulo pari a:

$$a = R\alpha = \frac{mg}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)} \approx 0.90\, m/s^2,$$

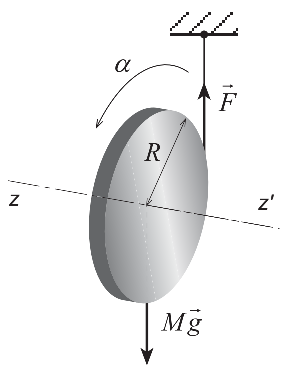
e l'intensità della forza $\vec{F}$ vale:

$$F = m(g - a) = 8.9\,N,$$

infine, le reazioni del vincolo hanno intensità pari a:

$$F' = \frac{1}{2}(F + Mg) = 102.4\,N.$$

Esempio: Un disco con le stesse caratteristiche di quello dell'esempio precedente è disposto come in figura. Stabiliamo l'accelerazione angolare e quella verso il basso del centro di massa. Anche in questo caso l'asse di rotazione ***zz'*** è un asse principale quindi risulta:



$$I\alpha = \tau$$

dove $I = (1/2)MR^2$ e $\tau = RF$ così, sostituendo si ha:

$$F = \frac{1}{2}MR\alpha.$$

Il centro di massa, in questo caso, non è fermo, ma si muove di moto accelerato soddisfacendo all'equazione:

$$ma = mg - F,$$

dove

$$a = R\alpha.$$

Quindi, sostituendo nell'equazione del moto si ottiene:

$$MR\alpha = Mg - \frac{1}{2}MR\alpha\,,$$

da cui segue

$$\alpha = \frac{2g}{3R} = 13.16\,rad/s^2$$

e l'accelerazione a vale

$$a = R\alpha = 6.53\,m/s^2\,,$$

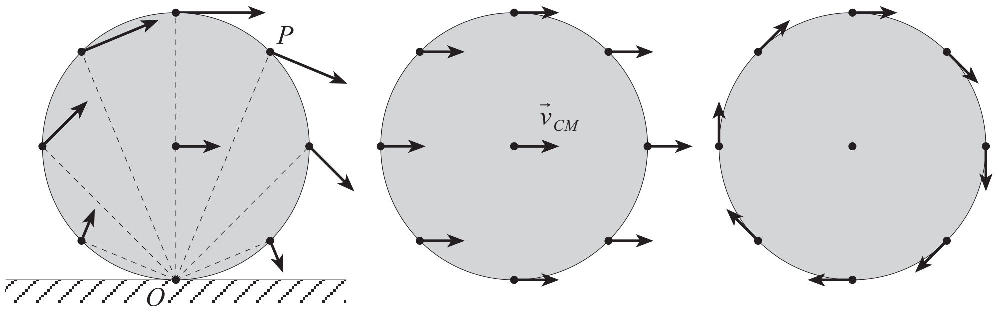
che è indipendente dalla massa e molto minore dell'accelerazione di caduta libera. Il centro di massa si muove, quindi, di moto uniformemente accelerato.

8 Moto di puro rotolamento

Consideriamo un corpo di forma cilindrica situato su un piano e in movimento rispetto ad esso. Tale moto può esplicarsi secondo tre modalità:

1. *Moto di traslazione*: Le velocità di tutti i punti del corpo sono uguali tra loro e parallele al piano; in questo caso si dice comunemente che il corpo in questione striscia sul piano.
2. *Moto rototraslatorio*: Il corpo rotola sul piano e i punti di contatto hanno velocità diversa da zero rispetto al piano.
3. *Moto di puro rotolamento*: I punti di contatto tra corpo e piano presentano una velocità nulla rispetto al piano.

In questo ambito affrontiamo lo studio del terzo caso corrispondente, ad esempio, al moto di una ruota. In tale circostanza il moto può essere considerato come un moto di rotazione semplice intorno ad un asse parallelo all'asse della ruota e coincidente ad ogni istante con la linea di contatto con il piano (*asse istantaneo di rotazione*).

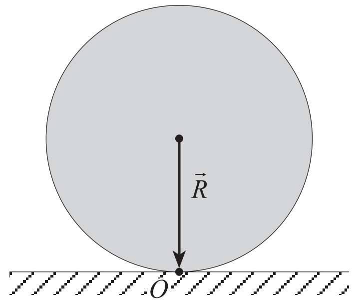


Come evidenzia la prima figura, le velocità dei punti della ruota sono, in ciascun punto, normali alla congiungente il punto con la traccia dell'asse di rotazione ed hanno intensità pari a $\omega\overline{OP}$. Questa distribuzione istantanea di velocità si può ottenere sovrapponendo una distribuzione uniforme in cui tutti i punti si muovono con velocità $\vec{v}_{CM}$, propria dell'asse della ruota ed una rotazione intorno all'asse della ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$. Affinché, istante per istante, il punto O resti fermo sulla ruota deve agire una forza; siccome il punto O è fermo, la forza è una forza di attrito statico che si esercita tra il piano e la ruota.

La velocità di un punto P del corpo posto a distanza r dal centro di massa si scrive come:

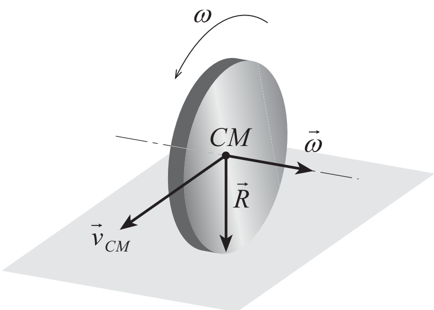
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}\ ,$$

ovvero come somma della velocità del centro di massa e della velocità di P rispetto al centro di massa. La condizione affinché si abbia un moto di puro rotolamento è che la velocità $\vec{v}_O$ dei punti situati sull'asse istantaneo di rotazione sia nulla; allora dalla relazione precedente, che è valida per ogni punto del corpo, segue:



$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{R}\ ,$$

in cui il vettore $\vec{R}$ ha origine nel centro di massa ed ha l'estremo libero in un punto dell'asse istantaneo di rotazione. Pertanto, nel moto di puro rotolamento, esiste una relazione definita tra la velocità con cui trasla il centro di massa e la velocità angolare, cioè tali grandezze non sono indipendenti. In modulo, siccome $\vec{R}$ e $\vec{\omega}$ sono perpendicolari, si ha:

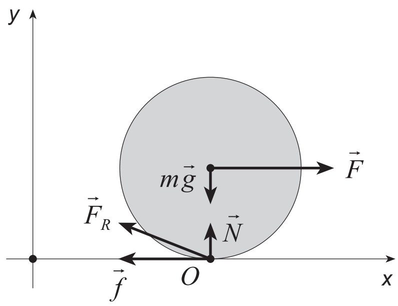


$$v_{CM} = \omega R$$

e, di conseguenza, l'accelerazione a_{CM} del centro di massa vale:

$$a_{CM} = \alpha R\ .$$

Il moto testé descritto può aversi o per l'azione sull'asse di una forza orizzontale costante o attraverso l'applicazione sull'asse di un momento costante oppure, nel caso più generale, per l'azione contemporanea sull'asse sia di una forza che di un momento.



Consideriamo la prima circostanza, cioè supponiamo che il corpo rotoli senza strisciare su una superficie piana orizzontale per effetto di una forza orizzontale costante $\vec{F}$ applicata all'asse. Sul corpo agiscono inoltre la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione $\vec{F}_R$ del piano. Tale reazione si decompone in una componente normale $\vec{N}$ ed una tangenziale $\vec{f}$ (forza di attrito statico). Poiché $\vec{F}$ è orientata nel verso positivo delle x, affinché il punto di contatto O resti fermo la forza $\vec{f}$ deve essere opposta a $\vec{F}$, ovvero orientata nel verso negativo delle x. L'equazione del moto del centro di massa è:

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F} + \vec{F}_R + m\vec{g}\ ,$$

che, decomposta lungo gli assi coordinati, è:

$$ma_{CM} = F - f\ , \tag{10}$$

$$0 = N - mg,$$

dalla seconda delle quali segue immediatamente $N = mg$. L'equazione del moto di rotazione, scelto il centro di massa CM come polo, si scrive:

$$I\vec{\alpha} = \vec{R} \times \vec{f}$$

siccome, delle forze agenti, $\vec{f}$ è l'unica ad avere momento rispetto al centro di massa diverso da zero. Poiché $\vec{R}$ ed $\vec{f}$ sono tra loro perpendicolari, segue:

$$I\alpha = Rf\ ;$$

d'altra parte l'accelerazione α vale a_{CM}/R così, sostituendo segue:

$$I\frac{a_{CM}}{R} = Rf\ ; \tag{11}$$

sostituendo f da tale espressione nella relazione (10), si ottiene:

$$ma_{CM} = F - \frac{Ia_{CM}}{R^2},$$

ovvero:

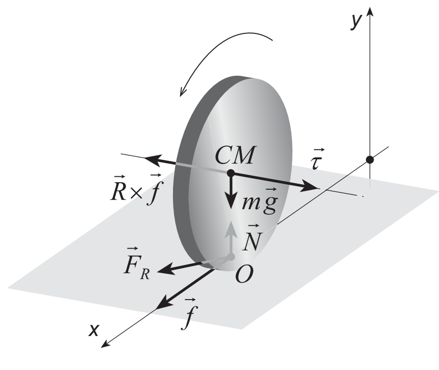
$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)}$$

e pertanto, dalla (11) l'intensità della forza $\vec{f}$ vale:

$$f = \frac{Ia_{CM}}{R^2} = \frac{I}{R^2}\frac{F}{m\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)} = \frac{F}{\frac{R^2}{I}\left(m+\frac{I}{R^2}\right)} = \frac{F}{1+\frac{mR^2}{I}}.$$

Affinché non si abbia lo strisciamento, ovvero il punto O resti fermo, l'intensità della forza $\vec{f}$ non può superare l'intensità della massima forza d'attrito statico $\mu_S N$ pari a $\mu_S mg$. Quindi, dovendo risultare $f \le \mu_S N$, segue:

$$F \le \mu_S N\left(1+\frac{mR^2}{I}\right) \equiv F_{max},$$



pertanto, se l'intensità della forza F supera il valore massimo F_{max}, il corpo rotola e striscia contemporaneamente.

Consideriamo ora la circostanza secondo cui all'asse del corpo è applicato un momento $\vec{\tau}$, ad esempio attraverso un motore. In questo caso, affinché non si abbia slittamento la forza $\vec{f}$ deve avere il verso di figura. L'equazione del moto del centro di massa è:

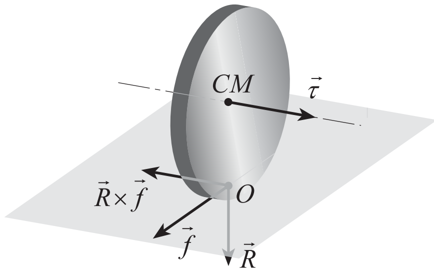
$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}_R + m\vec{g}$$

che, decomposta lungo gli assi coordinati è:

$$ma_{CM} = f\,, \qquad (12)$$

$$0 = N - mg,$$

dalla seconda delle quali segue ancora $N = mg$. Scelto il centro di massa come polo, l'equazione del moto di rotazione è:



$$I\vec{\alpha} = \vec{\tau} + \vec{R}\times\vec{f}$$

e siccome $\vec{R}$ ed $\vec{f}$ sono perpendicolari si ha:

$$I\alpha = \tau - Rf\,.$$

Sostituendo ad α la sua espressione e ad f il valore ottenuto dalla (12) si ha:

$$I\frac{a_{CM}}{R} = \tau - R\,ma_{CM}\,,$$

ovvero:

$$a_{CM} = \frac{\tau}{mR\left(1+\dfrac{I}{mR^2}\right)},$$

pertanto, sostituendo tale espressione nella relazione (12) si ottiene:

$$f = ma_{CM} = \frac{\tau}{R\left(1+\dfrac{I}{mR^2}\right)}.$$

Infine, affinché non si abbia lo strisciamento deve essere $f \le \mu_S N$, dove N vale mg, ovvero:

$$\tau \le \mu_S mgR\left(1+\frac{I}{mR^2}\right) \equiv \tau_{max}$$

così, se τ supera il valore massimo τ_{max} il corpo, oltre a rotolare, striscia. Si noti che a differenza della circostanza precedente in cui la reazione tangente $\vec{f}$ si oppone al moto determinato dalla forza $\vec{F}$, in questo caso, in cui il moto è originato dall'azione del momento $\vec{\tau}$, è la forza $\vec{f}$ a causare l'accelerazione del centro di massa (dalla relazione (12)), cioè quando un motore fa girare una ruota è l'attrito col suolo che lo spinge in avanti.

Nel caso più generale in cui si ha l'azione contemporanea della forza e del momento, non conoscendo a priori il verso della forza $\vec{f}$ la assumiamo concorde con $\vec{F}$ (concorde con l'asse *x*), allora le equazioni del moto si scrivono come:

$$ma_{CM} = F + f,$$
$$I\alpha = \tau - Rf,$$

dove α vale a_{CM}/R; sostituendo tale grandezza nelle equazioni del moto e risolvendo si trova:

$$a_{CM} = \frac{F + \frac{\tau}{R}}{m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)},$$

che, come si può verificare, è indipendente dal verso di $\vec{f}$ e inoltre:

$$f = \frac{\frac{\tau}{R} - \frac{I}{mR^2}F}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

dove, affinché si abbia il moto di puro rotolamento deve risultare $f \le \mu_S N = \mu_S mg$. La forza di attrito $\vec{f}$ sarà concorde o discorde con $\vec{F}$ a seconda se τ sia maggiore o minore di IF/mR e, in particolare, quando $\tau = IF/mR$ la forza $\vec{f}$ è nulla e l'accelerazione del centro di massa a_{CM} vale F/m. Cioè per $\tau = IF/mR$ è possibile un moto accelerato anche in assenza di attrito; questo è il motivo, ad esempio, per cui occorre spingere un'autovettura le cui ruote hanno perso aderenza, come accade su una superficie ghiacciata.

In tutti i casi esaminati il moto di traslazione e il moto di rotazione risultano entrambi accelerati, cioè a_{CM} e α sono costanti se è tale la sollecitazione applicata. Per avere un moto accelerato è essenziale la presenza dell'attrito (statico) salvo in casi particolari. Tuttavia le forze e i momenti agenti devono essere tali che la forza d'attrito non superi la forza massima di attrito statico altrimenti il corpo, oltre che rotolare, striscia, situazione quest'ultima, in cui agisce l'attrito dinamico. Si noti che nel moto di puro rotolamento la forza d'attrito non compie lavoro essendo applicata ad un punto che, istante per istante, è fermo, quindi pur essendoci la forza, non c'è alcuno spostamento; ne segue che in tale circostanza vale la legge di conservazione dell'energia meccanica. Sperimentalmente si osserva che un corpo che rotola senza strisciare su una superficie orizzontale, in assenza di forze e momenti applicati, dopo un certo tempo si arresta. Ciò suggerisce l'esistenza di un'altra forma di attrito, detto *attrito volvente* o di rotolamento, attribuito alla deformazione locale del piano in corrispondenza del corpo. L'attrito volvente si può schematizzare introducendo un momento resistente applicato sul corpo che rotola, il cui modulo è proporzionale alla componente normale N della forza di contatto tra il corpo e il piano d'appoggio:

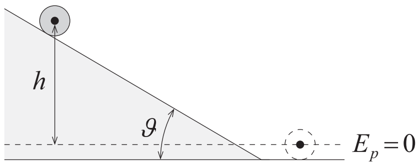
$$\tau_R = \rho_v N;$$

sperimentalmente si osserva che il *coefficiente di attrito volvente* ρ_v è largamente indipendente da N, dal raggio del corpo di forma circolare che rotola e dalla velocità angolare di rotolamento, ma dipende dalla natura e dallo stato di lavorazione delle superfici a contatto. Per vincere il momento dovuto all'attrito volvente si deve applicare al corpo, di massa m e raggio R, una forza di trazione F tale che:

$$F \geq \frac{\tau_R}{R} = \frac{\rho_v N}{R} = \frac{\rho_v mg}{R}.$$

L'effetto dell'attrito volvente risulta solitamente molto piccolo per cui il suo contributo viene spesso trascurato.

Esempio: Valutiamo la velocità raggiunta da un corpo cilindrico di massa m che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato a partire da un istante iniziale $t=0$ in cui è a riposo alla quota h. Applicando il principio di conservazione dell'energia si ha:



$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2},$$

dove E_{p1} vale mgh, E_{k1} è zero essendo il corpo in quiete all'istante iniziale, E_{p2} è zero, se si assume il livello di riferimento dell'energia potenziale passante per il centro del corpo quando questo è alla base del piano e infine E_{k2} vale $(1/2)I\omega^2 + (1/2)mv_{CM}^2$, dove ω e v_{CM} sono, rispettivamente, la velocità angolare e la velocità del centro di massa del corpo e I è il momento d'inerzia del corpo calcolato rispetto al suo asse longitudinale. Sostituendo si ha:

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}I\frac{v_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv_{CM}^2,$$

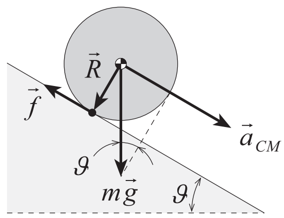
da cui segue:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mR^2}}}.$$

Qualora il corpo scivolasse senza attrito, l'espressione del principio di conservazione dell'energia sarebbe $mgh = (1/2)mv_{CM}^2$, da cui si ha $v_{CM} = \sqrt{2gh}$. Invece, quando il corpo rotola senza strisciare l'energia potenziale iniziale mgh si trasforma in energia cinetica di rotazione $(1/2)I\omega^2$ del moto rispetto al centro di massa ed energia cinetica di traslazione del centro di massa $(1/2)mv_{CM}^2$. Per tale motivo la velocità finale del moto lungo il piano inclinato soddisfa la disuguaglianza:

$$v_{CM} < \sqrt{2gh}.$$

Indicando con $\vec{f}$ la forza di attrito statico tra il corpo ed il piano, l'equazione del moto del centro di massa è:



$$ma_{CM} = mg\sin\vartheta - f$$

e l'equazione del moto di rotazione attorno al centro di massa è:

$$Rf = I\alpha = \frac{Ia_{CM}}{R},$$

da cui segue $a_{CM} = f\,R^2/I$ che, sostituita nell'equazione del moto fornisce l'intensità della forza d'attrito:

$$f = \frac{mg\sin\vartheta}{1+\frac{mR^2}{I}},$$

per cui l'accelerazione a_{CM} vale:

$$a_{CM} = \frac{g\sin\vartheta}{1+\frac{I}{mR^2}},$$

In particolare da tale espressione si ritrova v_{CM} attraverso la relazione $v_{CM} = a_{CM}T$ in cui T, pari a $\sqrt{2h/a_{CM}\sin\vartheta}$ è il tempo necessario a rotolare lungo il piano sino alla base, partendo dall'altezza h. Siccome N vale $mg\cos\vartheta$ la condizione di non scivolamento $f \le \mu_S N$, si esprime come:

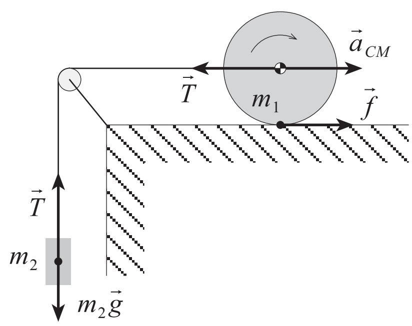
$$f \le \mu_S mg\cos\vartheta$$

da cui, sostituendo ad f la sua espressione segue:

$$\tan\vartheta \le \mu_S\left(1+\frac{mR^2}{I}\right),$$

cioè, affinché si abbia un moto di puro rotolamento l'inclinazione del piano non deve superare il valore massimo

$$\vartheta_m = \arctan\left[\mu_S\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)\right].$$



Esempio: Consideriamo un cilindro pieno, di massa pari a $20\,kg$ e raggio di $25\,cm$ che rotola senza strisciare su un piano orizzontale. All'asse del cilindro è applicato un momento, perpendicolare al piano del foglio ed entrante, di modulo pari a $30\,Nm$ ed è contemporaneamente sospeso, tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile, un corpo di massa pari a $10\,kg$. Stabiliamo l'accelerazione del centro di massa del cilindro, la tensione del filo e il minimo valore consentito per il coefficiente d'attrito affinché il cilindro rotoli senza strisciare. Si noti che la direzione della forza $\vec{T}$ agente sul cilindro e il verso di rotazione determinato dal momento $\vec{\tau}$ fanno sì che la forza d'attrito $\vec{f}$ deve avere verso opposto rispetto a $\vec{T}$. Assumendo che il verso di $\vec{a}_{CM}$ sia concorde con quello di $\vec{f}$ (se poi, attraverso i calcoli, si trova $a_{CM} < 0$, allora il verso di tale vettore è opposto a quello arbitrariamente assunto), segue l'equazione del moto del centro di massa del cilindro:

$$m_1 a_{CM} = f - T.$$

L'equazione del moto di rotazione è:

$$I\alpha = \tau - Rf,$$

e l'equazione del moto per il corpo di massa m_2 è:

$$m_2 a_{CM} = T - m_2 g.$$

Si noti che aver assunto, arbitrariamente, $\vec{a}_{CM}$ diretta come $\vec{f}$ implica che l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ ha verso tale da determinare una rotazione nello stesso verso della rotazione che si avrebbe per effetto del solo momento $\vec{\tau}$; inoltre il verso dell'accelerazione del corpo m_2, con la scelta fatta, risulta opposto alla forza peso $m_2\vec{g}$. Se si fosse assunto $\vec{a}_{CM}$

opposta a $\vec{f}$, allora il moto del centro di massa del cilindro sarebbe stato descritto dall'equazione $m_1 a_{CM} = T - f$, l'equazione del moto di rotazione del cilindro sarebbe stata $I\alpha = Rf - \tau$ e per il corpo sospeso $m_2 a_{CM} = m_2 g - T$. I risultati ottenuti, ovviamente, non devono dipendere da questa scelta. Dalla terza equazione segue:

$$T = m_2 a_{CM} + m_2 g$$

e, dalla seconda, posto $\alpha = a_{CM}/R$, segue:

$$f = \frac{\tau}{R} - \frac{I a_{CM}}{R^2}$$

che, sostituite entrambe nella prima danno:

$$a_{CM} = \frac{\dfrac{\tau}{R} - m_2 g}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}} = \frac{\dfrac{\tau}{R} - m_2 g}{m_1 + m_2 + \dfrac{1}{2}R^2 \dfrac{1}{R^2}} = \frac{\dfrac{\tau}{R} - m_2 g}{m_2 + \dfrac{3}{2} m_1} \approx 0.55\, m/s^2,$$

essendo $I = (1/2) m_2 R^2$. Se $\tau > m_2 g R$ il moto avviene nella direzione di $\vec{f}$, altrimenti avviene nella direzione opposta. Sostituendo tale valore nell'espressione di T segue che tale quantità vale $103.5\, N$, mentre f è di $114.5\, N$. Infine , dovendo valere $f < \mu_S m_1 g$, segue:

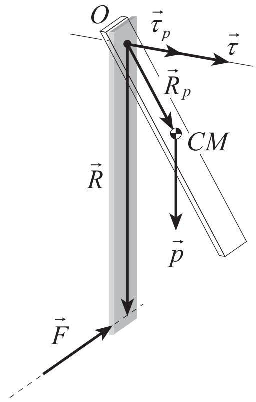
$$\mu_S \geq \frac{f}{m_1 g} \approx 0.58;$$

se μ_S è minore, l'attrito del piano risulta insufficiente a garantire il puro rotolamento.

9 Impulso angolare

Attraverso la seconda legge di Newton è stata riguardata la variazione infinitesima della quantità di moto $d\vec{p}$ come l'impulso elementare della forza $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ tra i tempi t e $t + dt$. In analogia, è possibile definire la quantità $d\vec{L}$ come *impulso angolare* elementare del momento $\vec{\tau}$. Integrando tale quantità tra i tempi t_1 e t_2 si ottiene l'impulso angolare del momento $\vec{\tau}$ nell'intervallo $t_2 - t_1$:

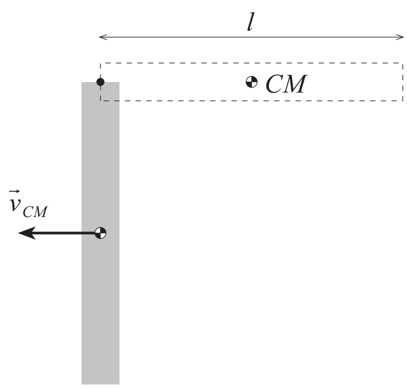
$$\vec{\mathcal{I}}_\tau = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\, dt = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1);$$



pertanto l'impulso angolare di $\vec{\tau}$ è pari alla variazione del momento angolare del corpo. Così, come per mettere in moto un corpo occorre applicare ad esso una forza per un breve istante, analogamente per determinare la rotazione di un corpo attorno ad un asse fisso o per farlo rotolare bisogna applicargli un momento per un breve tempo. Ad esempio, per porre in rotazione un'asta rigida sospesa ad un estremo è possibile applicare una forza intensa $\vec{F}$ per un breve tempo. Se $\vec{R}$ è il vettore che origina dal punto in cui l'asta è vincolata ed ha l'estremo libero in corrispondenza punto di applicazione della forza $\vec{F}$, rispetto al polo O situato nel punto di sospensione si ha:

$$\vec{\mathcal{I}}_\tau = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{R}\times\vec{F}\right) dt = \vec{R}\times\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \vec{R}\times\vec{\mathcal{I}},$$

se la forza è applicata tra gli istanti t_1 e t_2. Il prodotto vettoriale $\vec{R}\times\vec{\mathcal{I}}$ viene spesso indicato come momento dell'impulso $\vec{\mathcal{I}}$ (della forza $\vec{F}$). Nell'espressione dell'integrale non compaiono le forze di reazione del vincolo perché hanno momento nullo essendo applicate in O e si è trascurato il momento della forza peso $\vec{R}_p \times \vec{p}$ perché assunto piccolo rispetto al momento di $\vec{F}$.



Esempio: Consideriamo un'asta di massa m e lunghezza l che può ruotare in un piano verticale attorno ad un suo estremo. Stabiliamo la velocità del centro di massa quando l'asta, lasciata cadere dalla sua posizione orizzontale, raggiunge la posizione verticale. Quando l'asta è in posizione orizzontale l'energia totale vale mgl mentre quando raggiunge la posizione verticale l'energia vale $(1/2)I^2\omega + mg(l/2)$, pertanto dal principio di conservazione dell'energia segue:

$$mgl = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{l}{2},$$

dove

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

così, sostituendo, si ha:

$$mgl = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}mgl,$$

da cui segue:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Infine, siccome v_{CM} vale $\omega l/2$, si ha:

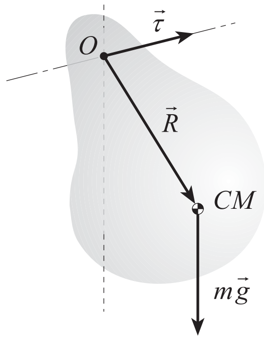
$$v_{CM} = \sqrt{\frac{3gl}{4}}.$$

10 Statica

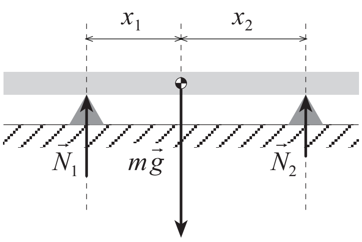
Per un punto materiale in quiete la condizione di equilibrio è che la risultante delle forze agenti su di esso sia nulla. Nel caso di un corpo rigido tale condizione non è sufficiente a garantire l'equilibrio in quanto il corpo può essere soggetto ad un momento che ne altera la condizione di equilibrio. Pertanto le condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido inizialmente in quiete sono:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0},$$
$$\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0},$$

ovvero, per ottenere l'equilibrio traslazionale la somma di tutte le forze agenti deve essere uguale a zero e per ottenere l'equilibrio rotazionale la somma di tutti i momenti deve essere uguale a zero. In particolare se $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$, si ha l'equilibrio statico del centro di massa, $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$; mentre se $\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0}$ non si ha moto rotatorio, $\vec{\omega} = \vec{0}$. In particolare se risulta $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ il momento totale $\sum_i \vec{\tau}_i$ è indipendente dalla scelta del polo così, se è nullo rispetto ad un polo, è tale rispetto a qualsiasi altro polo.



Consideriamo un corpo sospeso soggetto alla forza peso. Se il centro di massa non si trova lungo la verticale passante per il punto di sospensione O, il momento della forza peso $\vec{R} \times (m\vec{g})$ determina un'accelerazione angolare del corpo. In questo caso non può esserci equilibrio statico a meno che non intervenga un altro momento a contrastare il momento della forza peso. Se invece il centro di massa è situato lungo la verticale per O ed ha velocità nulla, la posizione è di equilibrio. Tale condizione è soddisfatta sia che il centro di massa si situi al di sopra che al di sotto del punto di sospensione lungo la verticale. Tuttavia nel primo caso l'equilibrio è instabile, ovvero se ne viene allontanato se ne distanzia ulteriormente, nel secondo caso è di equilibrio stabile, cioè se ne viene allontanato tende a tornare nella posizione originaria. Infine se il punto di sospensione coincide col centro di massa l'equilibrio è detto indifferente poiché, essendo sempre nullo il momento della forza peso, il corpo permane in qualsiasi posizione in cui viene abbandonato.



Esempio: Un'asta di massa m è in quiete appoggiata a due supporti. Stabiliamo le reazioni determinate da tali supporti. L'equilibrio traslazionale implica:

$$N_1 + N_2 = mg$$

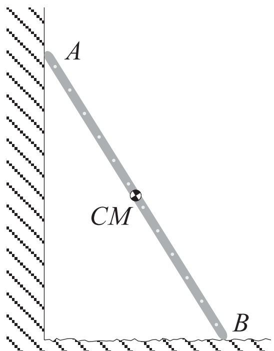
e, assumendo il centro di massa come polo, l'equilibrio rotazionale implica:

$$x_1 N_1 = x_2 N_2 .$$

Facendo il sistema tra tali relazioni si ha:

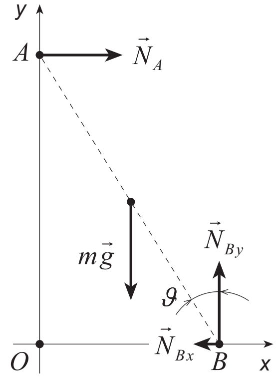
$$N_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} mg,$$
$$N_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} mg.$$

Si noti che se $x_1 = x_2$ allora $N_1 = mg/2 = N_2$.



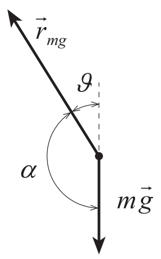
Esempio: Una scala di massa m e lunghezza l è poggiata con un estremo A ad una parete verticale senza attrito e con l'altro estremo B sul pavimento in cui è presente l'attrito. Stabiliamo le reazioni dei vincoli. Siccome il vincoli in A è liscio, la reazione si esplica solo normalmente alla parete; al contrario in B, il vincoli presenta attrito e quindi la reazione forma un angolo diverso da zero con la direzione verticale. La condizione di equilibrio traslazionale implica:

$$x: \qquad N_A - N_{Bx} = 0,$$
$$y: \qquad N_{By} - mg = 0.$$



Assumendo B come polo, la condizione di equilibrio rotazionale si scrive:

$$\vec{\tau}_{mg} \times (m\vec{g}) - \vec{\tau}_{F_A} \times \vec{N}_A = \vec{0}$$

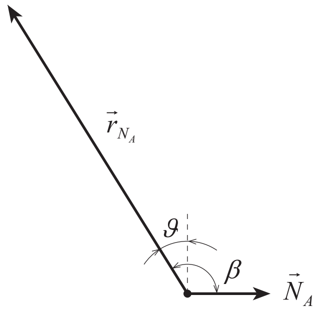


ovvero, passando ai moduli:

$$\frac{l}{2} mg \sin\alpha - lN_A \sin\beta = 0;$$

d'altra parte, siccome $\alpha = \pi - \vartheta$ e $\beta = (\pi/2) + \vartheta$, si ha:

$$\frac{l}{2} mg \sin\vartheta - lN_A \cos\vartheta = 0.$$

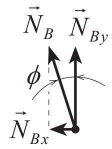


Da questa relazione segue:

$$N_A = \frac{1}{2} mg \tan\vartheta,$$

e quindi:

$$N_B = \sqrt{N_{Bx}^2 + N_{By}^2} = \sqrt{N_A^2 + (mg)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(mg)^2 \tan^2\vartheta + (mg)^2} = mg\sqrt{\frac{1}{4}\tan^2\vartheta + 1}.$$



La forza $\vec{F}_B$ forma, con la verticale, un angolo ϕ tale che:

$$\tan\phi = \frac{N_{Bx}}{N_{By}} = \frac{mg\tan\vartheta}{2mg} = \frac{1}{2}\tan\vartheta;$$

la scala resta in equilibrio se il pavimento riesce ad esplicare la forza di attrito N_{Bx} pari a $(1/2)mg\tan\vartheta$ e quindi se è soddisfatta la condizione:

$$\frac{1}{2} mg \tan\vartheta \le \mu_S N_{By} = \mu_S mg .$$

ovvero se $\tan\vartheta \le 2\mu_S$.