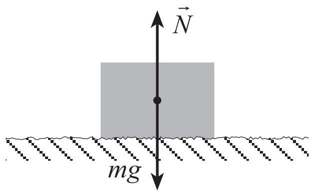
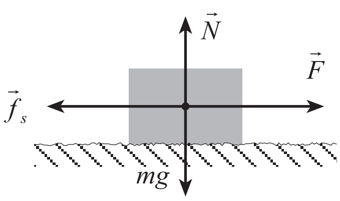
Forza d'attrito

La forza d'attrito è stata definita operativamente come l'agente che determina l'arresto di un corpo in moto su un piano orizzontale scabro. In generale tale forza si esercita ogni qual volta si ha un contatto tra corpi ed è caratterizzata dall'avere sempre direzione opposta al loro moto relativo. Pertanto le forze di attrito tendono sempre a contrastare il moto relativo tra i corpi. Tuttavia è possibile constatare che le forze di attrito si esplicano tra i corpi anche in assenza di moto relativo.

Consideriamo un corpo di massa m in quiete su una superficie orizzontale scabra. Su di esso agisce la forza peso $m\vec{g}$ e, siccome è in quiete, una reazione vincolare $\vec{N}$ tale che:



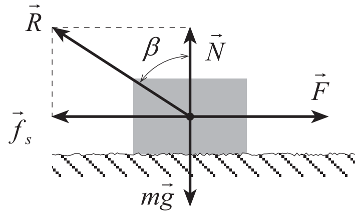
$$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}\,.$$



Supponiamo di applicare a tale corpo una forza $\vec{F}$ parallela al piano. Sperimentalmente si osserva che, per intensità di $\vec{F}$ sufficientemente piccole, il corpo rimane in quiete. In tale circostanza si può affermare che la forza $\vec{F}$ è contrastata da una forza di attrito $\vec{f}_s$ esercitata dal piano parallelamente ad $\vec{F}$, ovvero allungamento x tale che:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} + \vec{f}_s = \vec{0}\,.$$

In generale, le forze di attrito agenti tra corpi fermi sono dette forze di attrito statico, così $\vec{f}_s$ è una *forza di attrito statico*. Dalla precedente espressione concludiamo che in presenza di una sollecitazione $\vec{F}$ tale da non determinare il moto del corpo, la reazione $\vec{R}$ sviluppata dalla superficie cessa d'essere verticale e in particolare, posto:



$$\vec{R} \equiv \vec{N} + \vec{f}_s\,,$$

risulta:

$$\vec{R} = -\left(m\vec{g} + \vec{F}\right),$$

e l'angolo β formato dalla reazione $\vec{R}$ e la direzione normale vale:

$$\beta = \arctan\left(\frac{f_s}{N}\right).$$

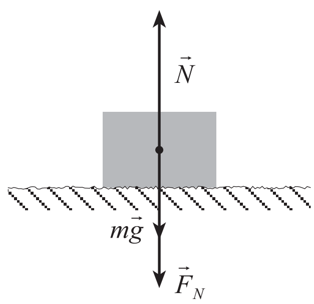
Affinché il corpo resti in quiete sul piano deve risultare:

$$\vec{N} = -m\vec{g},$$
$$\vec{F} = -\vec{f}_s,$$

pertanto l'angolo β vale:

$$\beta = \arctan\left(\frac{F}{mg}\right).$$

Supponiamo di aumentare progressivamente l'intensità della forza $\vec{F}$; sperimentalmente si osserva che il corpo permane nello stato di quiete fintanto F non eccede un valore massimo F_{max} oltre il quale il corpo prende a muoversi. Cioè la superficie scabra può sviluppare una forza di attrito statico la cui massima intensità $f_{s\,max}$ vale:



$$f_{s\,max} = F_{max}\,.$$

Se sul corpo viene esercitata una forza $\vec{F}_N$ verso il basso, ovvero viene premuto contro il piano, si osserva che l'intensità della forza necessaria a mettere in moto il corpo, F_{max}, aumenta col crescere del modulo di $\vec{F}_N$; d'altra parte, siccome la reazione normale esercitata dal piano $\vec{N}$ è pari alla somma $m\vec{g} + \vec{F}_N$, concludiamo che F_{max} è proporzionale al modulo di $\vec{N}$ e quindi anche $f_{s\,max}$ gode della stessa proporzionalità. Tale relazione viene indicata con:

$$f_{s\,max} = \mu_s N$$

in cui μ_s è un coefficiente numerico denominato *coefficiente di attrito statico*. Dalla relazione precedente concludiamo che le componenti f_s ed N di R soddisfano la disuguaglianza:

$$f_s \le \mu_s N,$$

quindi:

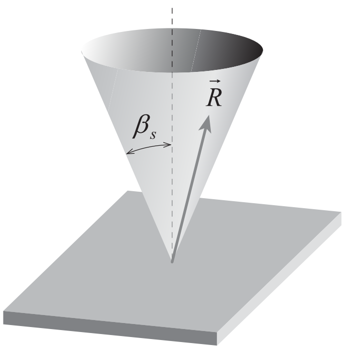
$$\tan\beta = \frac{f_s}{N} \le \mu_s,$$

e posto:

$$\beta_s \equiv \arctan\mu_s, \tag{9}$$

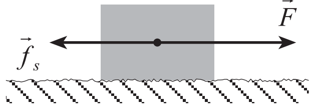
risulta:

$$\beta \le \beta_s,$$



cioè la superficie scabra è in grado di sviluppare una reazione $\vec{R}$ tale da essere contenuta in un cono, detto *cono di attrito statico*, che ha il vertice nel punto di contatto della superficie con il corpo (punto materiale) e angolo di semiapertura β_s. Qualora il corpo considerato venga ruotato in modo da appoggiare sul piano una faccia di superficie differente, si osserva che il coefficiente di attrito μ_s resta invariato. Concludiamo quindi che la massima forza di attrito statico che si esplica tra due superfici ha un'intensità proporzionale all'intensità della forza normale tra le due superfici e il coefficiente di proporzionalità μ_s dipende dalla natura e dallo stato di levigatezza delle superfici ma, entro grandi limiti, risulta indipendente dall'area di contatto tra le due superfici. Queste leggi empiriche hanno validità approssimata e, in particolare, non valgono se l'area di contatto è molto piccola (ad esempio se il corpo è appoggiato su lame o su punte), oppure se la forza normale alla superficie d'appoggio, $\vec{F}_N + m\vec{g}$, è così intensa da deformare la superficie.

Supponiamo di applicare al corpo una forza $\vec{F}$ parallela al piano di appoggio, di intensità superiore a $\mu_s mg$. In tale caso, poiché la forza di attrito statico può raggiungere al massimo l'intensità $\mu_s N$, non riesce ad equilibrare la forza $\vec{F}$ e il corpo prende a muoversi. La risultante delle forze agenti sul corpo è $\vec{F} - \vec{f}_{s\,max}$, essendo il peso $m\vec{g}$ equilibrato dalla componente $\vec{N}$ della reazione del vincolo, così l'accelerazione $\vec{a}^*$ cui è soggetto il corpo varrebbe:



$$\vec{a}^* = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - \vec{f}_{s\,max}\right),$$

di modulo:

$$a^* = \frac{1}{m}\left(F - f_{s\,max}\right).$$

Tuttavia si osserva sperimentalmente che il moto del corpo è uniformemente accelerato, ma il modulo dell'accelerazione $\vec{a}$ presenta un valore maggiore di a^*, ma minore di F/m:

$$a^* < a < \frac{F}{m}, \qquad (10)$$

ovvero la risultante delle forze agenti sul corpo in moto ha intensità costante, cioè è indipendente dalla velocità e minore di F. Concludiamo che il moto è contrastato da una forza $\vec{f}_d$ di intensità inferiore a $f_{s\,max}$ che denominiamo *forza di attrito dinamico*. Questa forza segue le stesse leggi dell'attrito statico, ossia è proporzionale all'intensità della forza normale $\vec{N}$ e, entro grandi limiti, è approssimativamente indipendente dalle superfici poste a contatto e dalla velocità relativa dei corpi a contatto. Pertanto, esprimendo il modulo della forza di attrito dinamico come:

$$f_d = \mu_d N, \qquad (11)$$

dove μ_d è denominato *coefficiente di attrito dinamico*, l'accelerazione assunta dal corpo vale:

$$a = \frac{1}{m}\left(F - f_d\right);$$

così, sostituendo a $f_{s\,max}$ ed a f_d le loro espressioni, la disuguaglianza (10) si scrive come:

$$\frac{1}{m}\left(F - \mu_s N\right) < \frac{1}{m}\left(F - \mu_d N\right) < \frac{F}{m},$$

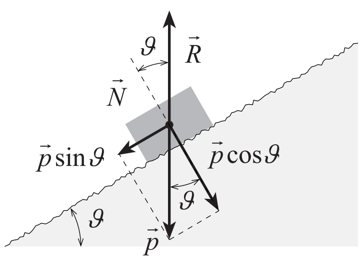
da cui segue:

$$0 < \mu_d < \mu_s$$

In particolare, affinché il corpo si muova con velocità costante, cioè $a = 0$, su di esso deve agire una forza $\vec{F}$ di intensità:

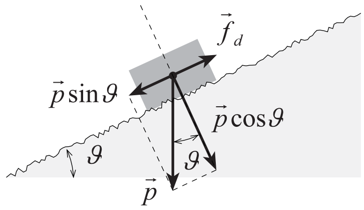
$$F = f_d = \mu_d N,$$

così, per determinare il moto di un corpo situato a contatto con una superficie scabra, occorre esercitare una forza di intensità maggiore di quella necessaria per mantenere costante la velocità del corpo, quando questo è già in moto sulla superficie.



Esempio: Un blocco è posto a riposo su un piano inclinato di un angolo ϑ rispetto ad un asse orizzontale. Aumentando l'angolo di inclinazione del piano si osserva che il blocco prende a muoversi per $\vartheta \geq \vartheta_s$. Da tale osservazione è possibile desumere il coefficiente di attrito tra il blocco e il piano; infatti, quando il corpo è in quiete, il piano esercita una reazione $\vec{R}$ che forma con la direzione normale al piano un angolo pari a quello di inclinazione del piano. Poiché il piano sviluppa una reazione $\vec{R}$ sempre contenuta nel cono di attrito statico, se il corpo prende a muoversi, significa che questo vettore giace sulla falda di tale cono, ovvero l'angolo ϑ_s coincide con l'angolo β_s della relazione (9), per cui il coefficiente di attrito statico può essere dedotto dalla medesima relazione come:

$$\mu_s = \tan \vartheta_s .$$



Con lo stesso sistema è possibile valutare il coefficiente di attrito dinamico. Infatti, posto in moto il corpo per $\vartheta \geq \vartheta_s$, l'angolo ϑ viene successivamente ridotto in modo che il corpo si muova di moto rettilineo uniforme; in tale circostanza risulta:

$$mg \sin \vartheta_d = f_d = \mu_d mg \cos \vartheta_d ,$$

dove ϑ_d è l'angolo in corrispondenza del quale il corpo scivola con velocità costante, allora:

$$\mu_d = \tan \vartheta_d ,$$

dove, siccome $\mu_s > \mu_d$, segue:

$$\vartheta_s > \vartheta_d .$$

Quando un corpo si muove in un fluido con velocità $\vec{v}$ è soggetto ad una forza d'attrito che, in generale, si esprime come:

$$\vec{f}_v = -\gamma v^{\alpha} \frac{\vec{v}}{v} ,$$

dove γ è una costante che dipende dalla forma del corpo e α è un coefficiente numerico, con $\alpha > 1$. Per piccole velocità è possibile assumere per l'intensità di tale forza l'espressione:

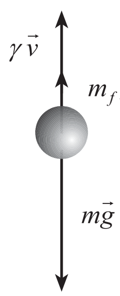
$$f_v = -\gamma v . \tag{12}$$

L'attrito che si esplica sul corpo per effetto del moto nel fluido è detto *viscosità* e il fattore γ può esprimersi come:

$$\gamma \equiv k\eta ,$$

dove η è detto *coefficiente di viscosità* e k dipende dalla forma del corpo (ad esempio, per una sfera di raggio R risulta pari a $6\pi R$). L'equazione del moto di un corpo sottoposto ad una forza $\vec{F}$ in un mezzo viscoso è:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \gamma \vec{v} ;$$



se l'intensità di $\vec{F}$ è costante, l'accelerazione del corpo determina un aumento progressivo della sua velocità e, di conseguenza, della forza di attrito viscoso. Ciò continua fino a che il secondo membro dell'equazione precedente si annulla, circostanza a partire dalla quale si annulla l'accelerazione e, di conseguenza, la velocità del corpo diventa costante. Il valore di tale *velocità limite* o di regime è:

$$v_L = \frac{F}{\gamma} .$$

Ad esempio, in un moto di caduta libera in aria, per azione della gravità, sul corpo agiscono la forza peso $m\vec{g}$, la forza di attrito viscoso $\gamma\vec{v}$ e la spinta idrostatica $m_f\vec{g}$, dove m_f è la massa d'aria spostata dal corpo, come indicato in figura, così l'equazione del moto è:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_f\vec{g} - \gamma\vec{v} \ ,$$

e la velocità limite è:

$$v_L = g\frac{m - m_f}{\gamma}$$

che, nel caso in cui $m_f << m$, diventa pari a mg/γ.

Esempio: Stabiliamo la legge di variazione della velocità per un corpo di massa pari a $60\,kg$, in caduta libera per effetto della gravità in un fluido con coefficiente di viscosità pari a $2\times10^{-3}\ kg/s$, supponendo che il corpo parta da fermo (assumiamo per semplicità che sia $m_f << m$). Esprimendo l'accelerazione attraverso la velocità, l'equazione del moto si scrive:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \gamma v(t). \tag{13}$$

Per risolvere numericamente tale equazione sostituiamo alla derivata dv/dt l'accelerazione media calcolata tra l'istante t e l'istante $t + \Delta t$:

$$m\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = mg - \gamma v(t);$$

da tale relazione segue[1]:

$$v(t+\Delta t) = g\Delta t - v(t)\left(\frac{\gamma}{m}\Delta t - 1\right).$$

Naturalmente tale equazione risulta tanto più precisa quanto più Δt è piccolo; assumendo, ad esempio, $\Delta t \equiv 0.15\,s$ e partendo da una velocità iniziale $v(0)$ nulla si trovano i seguenti valori di velocità:

$t[ms]$	$v[cm/s]$
0	0.0
15	14.7
30	22.2
45	25.7
60	27.6
75	28.5
90	29.0
105	29.2
120	29.3
135	29.4
150	29.4
165	29.4
180	29.4
195	29.4

Si noti che la velocità raggiunge un valore asintotico corrispondente alla velocità limite, infatti:

[1] Una relazione di questo tipo prende il nome di *equazione alle differenze*.

$$v_L = \frac{mg}{\gamma} \approx 29.4\, cm/s.$$

L'equazione differenziale (13) può essere risolta anche analiticamente per separazione di variabili, ovvero si può scrivere:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma} \right),$$

e quindi:

$$\frac{dv}{v - \frac{mg}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{m} dt,$$

da cui segue:

$$\int_0^v \frac{d\xi}{\xi - \frac{mg}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{m} \int_0^t d\zeta,$$

avendo assunto $v(0) = 0$. Svolgendo gli integrali si ottiene:

$$\ln\left(\frac{v - \frac{mg}{\gamma}}{-\frac{mg}{\gamma}} \right) = -\frac{\gamma}{m} t,$$

e, passando agli esponenziali:

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-t\gamma/m}\right).$$

Da tale relazione ricaviamo v_L come limite di $v(t)$ per $t \to \infty$:

$$v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma} \approx 29.4\, cm/s.$$

Si definisce *tempo di rilassamento* τ, il tempo necessario affinché $v(t)$ differisca da v_L di un fattore pari a $1/e$, dove $e = 2.71828...$, ovvero:

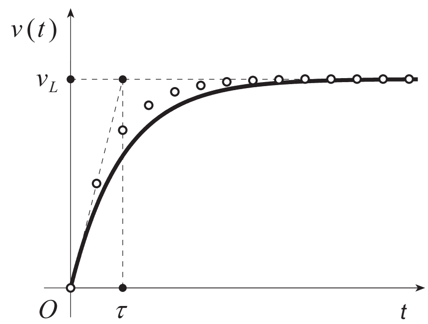
$$v(\tau) = v_L\left(1 - \frac{1}{e}\right),$$

per cui, nel caso dell'esempio

$$\tau = \frac{m}{\gamma} \approx 30\, ms.$$

Così la legge di variazione della velocità può esprimersi come:

$$v(t) = v_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right);$$



In figura è mostrato il grafico della velocità del corpo in funzione del tempo, ricavato sia attraverso il metodo approssimato che con la procedura analitica. Si noti che in corrispondenza del tempo di rilassamento la tangente alla curva $v = v(t)$, calcolata per $t = 0$, interseca l'asintoto $v \equiv v_L$; pertanto il tempo di rilassamento fornisce un'indicazione del tempo che impiega la velocità a differire dal valore limite per meno di una quantità prefissata.