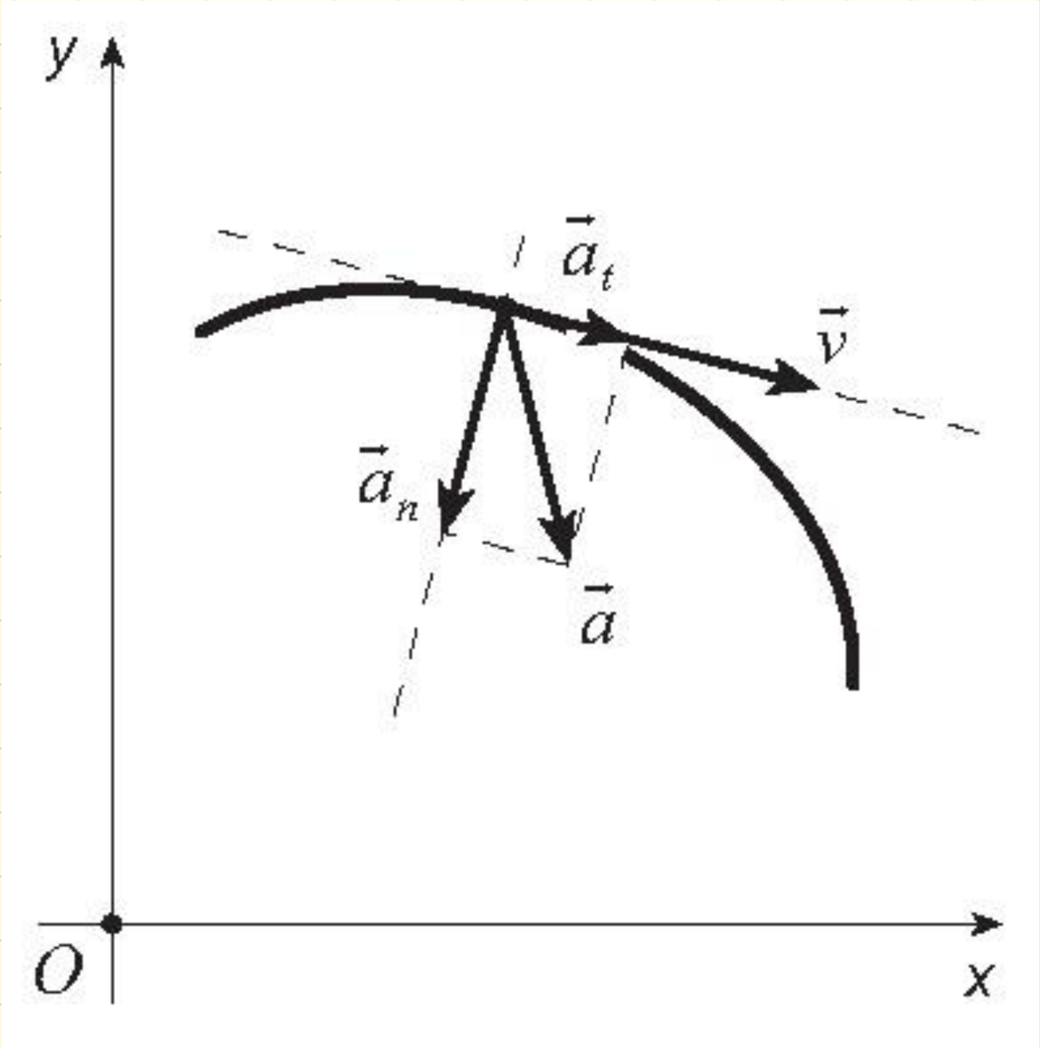
Componenti dell'accelerazione

- Consideriamo il moto di un punto materiale lungo una traiettoria curva che, per semplicità, assumiamo piana.
- Il vettore accelerazione ha la stessa direzione della variazione istantanea della velocità così, poiché la velocità cambia nella direzione in cui la traiettoria si incurva, l'accelerazione è sempre diretta verso la concavità della curva.
- Scomponiamo quindi il vettore accelerazione lungo la direzione tangente alla traiettoria, indicata dal versore **t** e lungo la direzione normale alla traiettoria, indicata dal versore **n**

$$\vec{a} = a_t \mathbf{t} + a_n \mathbf{n}$$

- Chiameremo la componente ***a_t* accelerazione tangenziale** e la componente ***a_n* accelerazione normale o centripeta**.

Componenti dell’accelerazione



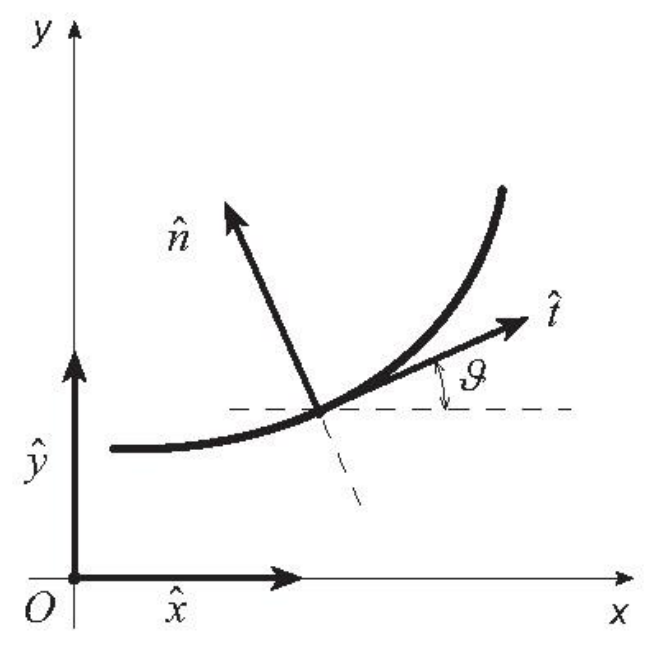
Componenti dell'accelerazione

- Per ricavare delle espressioni che permettano di ricavare i valori della accelerazione tangenziale a_t e della accelerazione normale o centripeta a_n, ricordando che, se riferiamo la velocità non più in senso "assoluto" ad un sistema di riferimento ma alla traiettoria usando il versore della traiettoria il vettore velocità, **v** è diretto lungo la tangente alla curva, si può scrivere

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\mathbf{t}\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt}$$

Componenti dell'accelerazione

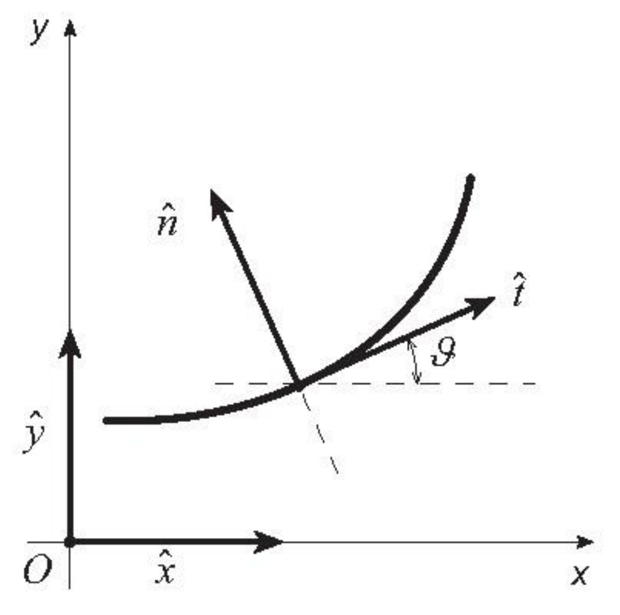
- Fissiamo l'attenzione sulla derivata di **t**: essa può essere ricavata esprimendo tale versore attraverso i versori degli assi, con riferimento alla figura, risulta infatti:



$$\mathbf{t} = \mathbf{x}\cos\theta + \mathbf{y}\,\mathrm{sen}\theta$$

Componenti dell'accelerazione

- Fissiamo l'attenzione sulla derivata di **t**: essa può essere ricavata esprimendo tale versore attraverso i versori degli assi, con riferimento alla figura, risulta infatti: $\mathbf{t} = \mathbf{x}\cos\theta + \mathbf{y}\,\mathrm{sen}\theta$



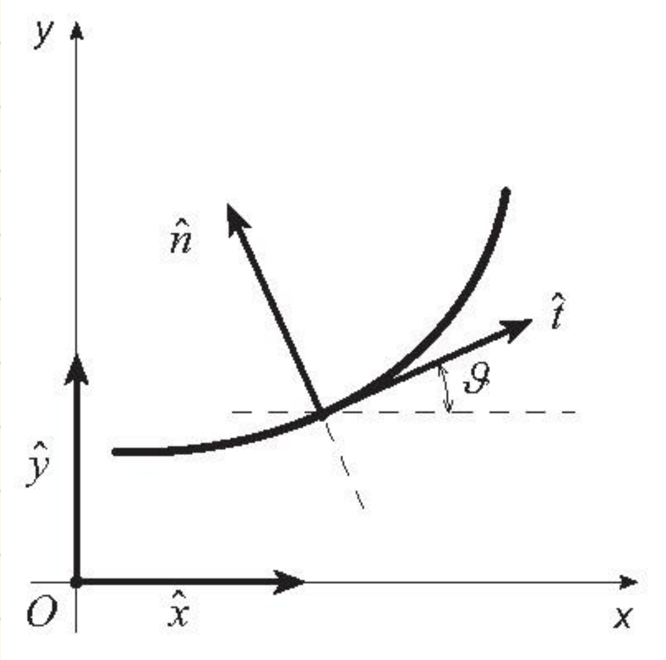
- per cui, la sua derivata sarà:

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = -\mathrm{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{x} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{y} = \left(-\,\mathrm{sen}\theta\mathbf{x} + \cos\theta\mathbf{y}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

Componenti dell'accelerazione

- Con riferimento alla figura, osservando che il versore **n** forma con l'asse x un angolo pari a: $\theta + \pi/2$ si ha

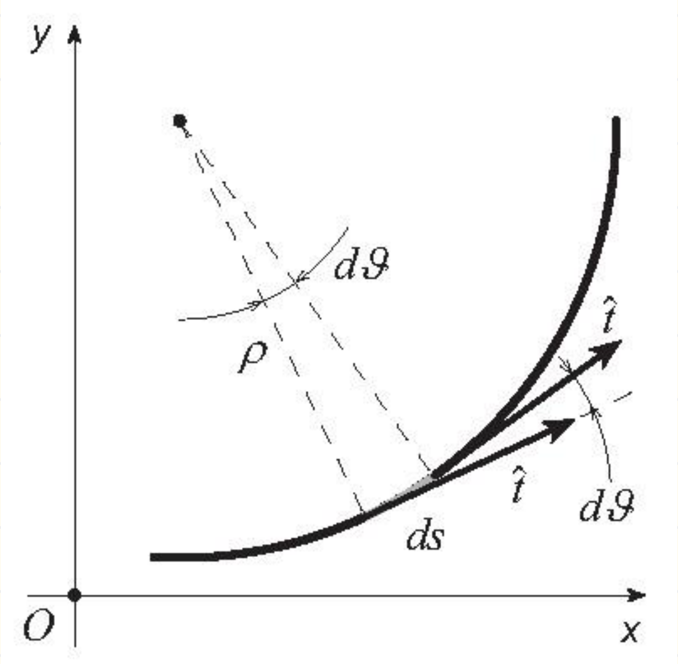
$$\mathbf{n} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{x} + \mathrm{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{y} = -\mathrm{sen}\theta\,\mathbf{x} + \cos\theta\,\mathbf{y}$$



per cui: $\dfrac{d\mathbf{t}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\mathbf{n}$

- Resta, quindi, solo da determinare il valore assunto dalla derivata $\dfrac{d\theta}{dt}$

Componenti dell'accelerazione



- Con riferimento alla figura, se indichiamo con ρ il raggio del cerchio (detto osculatore) che meglio approssima la curva nel punto considerato, raggio che prende il nome di raggio di curvatura, si può scrivere:

$$ds = \rho d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{\rho} ds \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} v$$

Componenti dell'accelerazione

- Partendo da $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho} v$ appena ottenuto e sostituendo nelle relazioni precedenti, si ha:

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{n} = \frac{v}{\rho}\mathbf{n}$$

- l'espressione definitiva dell'accelerazione riferita alla traiettoria diventa, quindi:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\theta}{dt}\mathbf{n} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$$

Componenti dell'accelerazione

- Partendo da $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho} v$ appena ottenuto e sostituendo nelle relazioni precedenti, si ha:

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{n} = \frac{v}{\rho}\mathbf{n}$$

- l'espressione dell'accelerazione riferita alla traiettoria diventa: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\theta}{dt}\mathbf{n} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$
- Per cui le componenti tangenziale e centripeta dell'accelerazione sono data da:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

Componenti dell'accelerazione

- Dalle relazioni precedenti di deduce che :
  1. se il modulo della velocità è costante, la componente tangenziale a_t dell'accelerazione è nulla
  2. se la traiettoria è rettilinea $\rho \rightarrow \infty$ e, quindi, la componente normale a_n dell'accelerazione è nulla

Velocità e accelerazione angolare

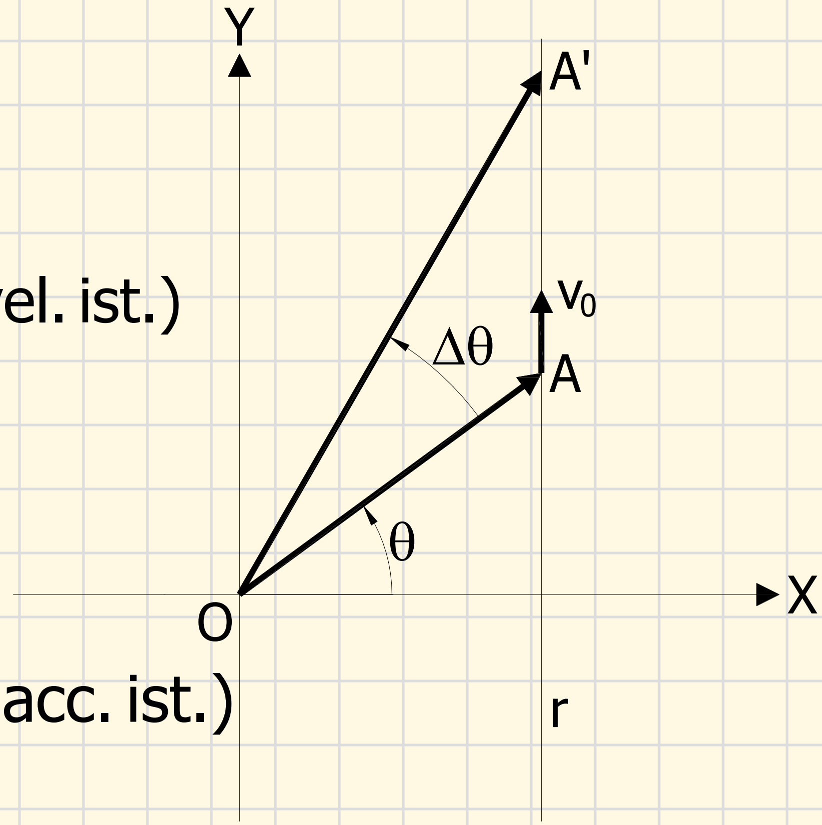
- Supponiamo che il punto materiale si muova con velocità v_0 sulla retta r
- L'angolo θ che il vettore posizione forma con l'asse X varia con il tempo
- Si possono calcolare velocità e l'accelerazione angolare

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ (vel. media)}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega(t) = D'\theta(t) \text{ (vel. ist.)}$$

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ (acc. media)}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha(t) = D'\omega(t) \text{ (acc. ist.)}$$



Il moto circolare

- Si definisce moto circolare il moto di un punto materiale che descrive una traiettoria circolare per cui sia, ovviamente, costante il raggio della circonferenza

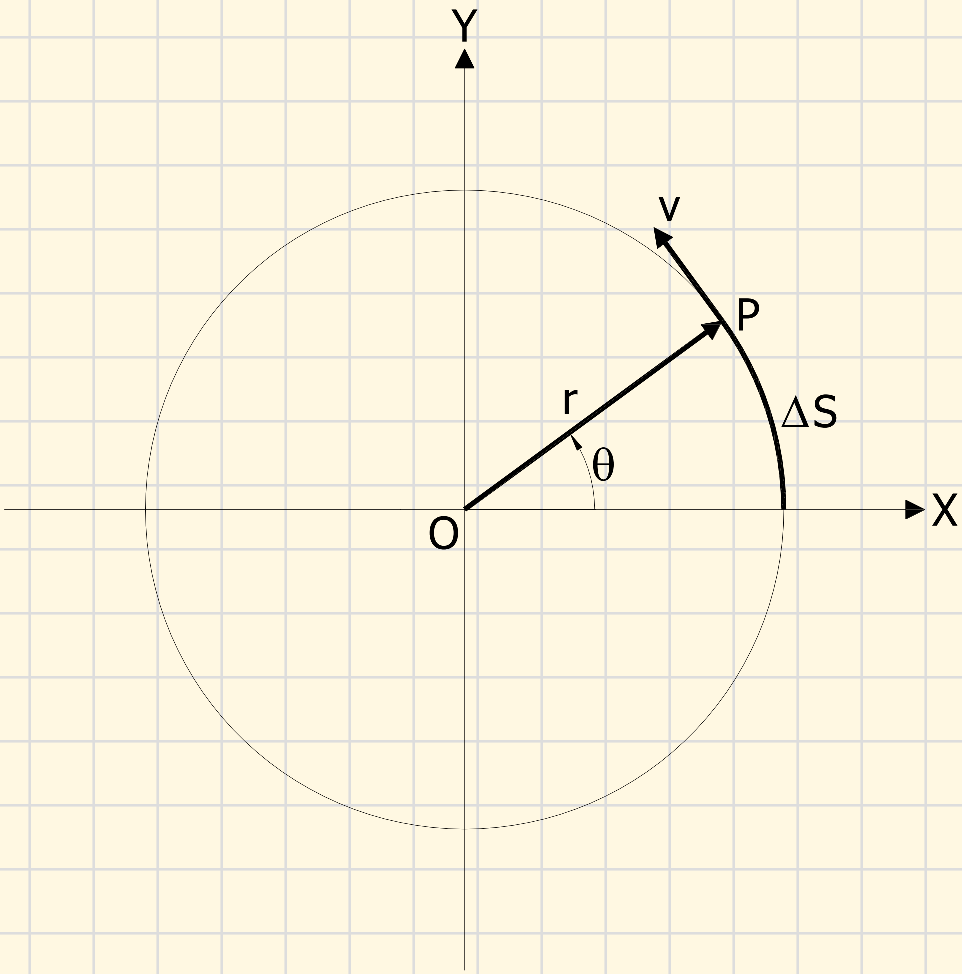
$$|\vec{\mathbf{r}}| = \text{costante}$$

$$x(t) = r \cdot \cos\theta(t)$$

$$y(t) = r \cdot \text{sen}\theta(t)$$

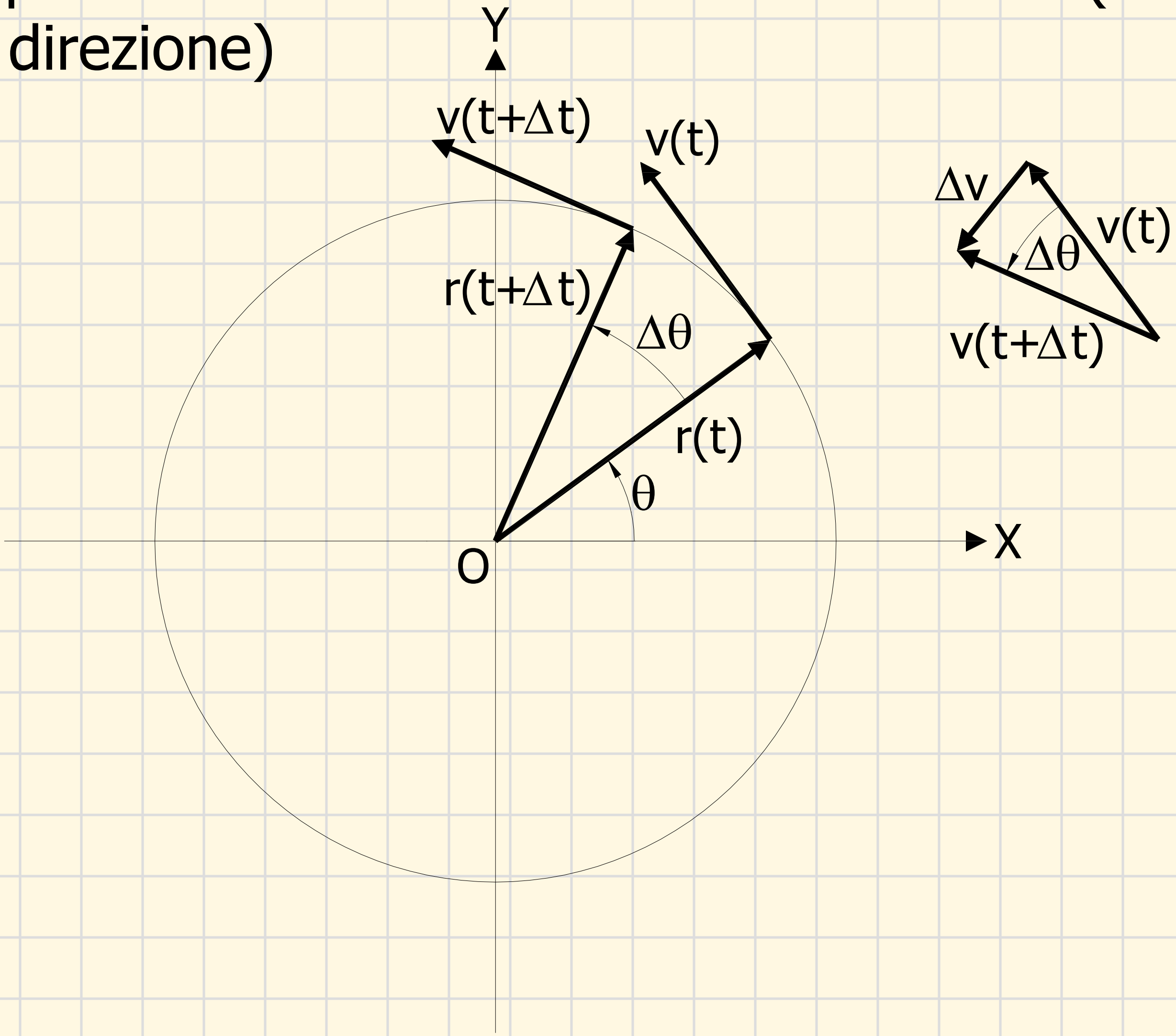
$$\Delta S = r \cdot |\theta|$$

$$v = r \cdot |\omega|$$



Il moto circolare uniforme

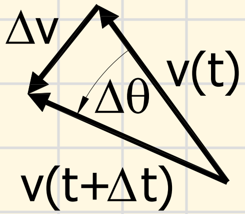
- Si definisce moto circolare uniforme un moto circolare per il quale è costante il modulo della velocità (ma non la sua direzione)



Moto circolare uniforme-Accelerazione

- Calcoliamo l'accelerazione vettoriale media nell'intervallo Δt. Essa avrà la stessa direzione e lo stesso verso della velocità (se Δt è maggiore di zero)

$$\vec{\mathbf{a}}_m = \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$



- L'accelerazione vettoriale istantanea all'istante t si ottiene facendo il limite per Δt tendente a zero)

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$

Moto circolare uniforme-Accelerazione

- Direzione e verso

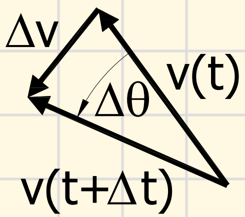
  Quando Δt tende a zero anche $\Delta\theta$ tende a zero

  Se $\Delta\theta$ tende a zero gli angoli alla base del triangolo delle velocità tendono a 90°

  L'accelerazione è perpendicolare al vettore velocità

  La velocità è tangenziale e l'accelerazione è radiale e diretta verso il centro (accelerazione centripeta)

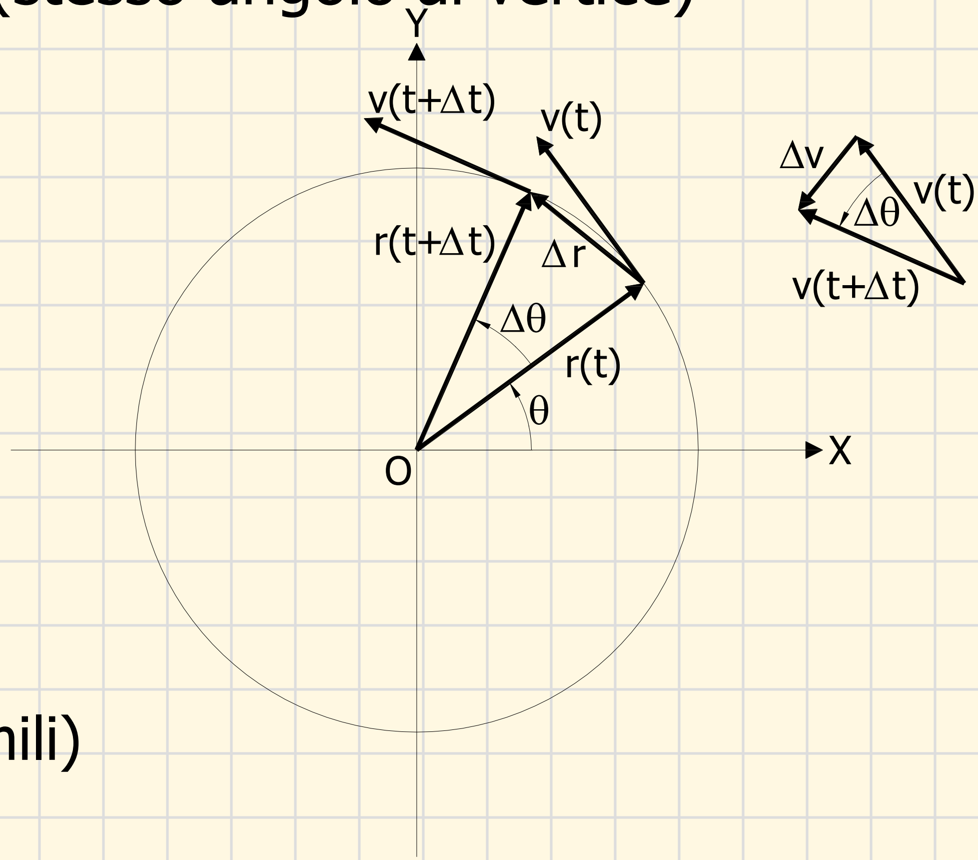
$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$



Moto circolare uniforme-Accelerazione

- Modulo

  Il triangolo dei vettori velocità e quello dei vettori posizione sono simili (stesso angolo al vertice)



$$\frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{|\vec{\mathbf{v}}|} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{|\vec{\mathbf{r}}|} \quad \text{(triangoli simili)}$$

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\vec{\mathbf{v}}|}{|\vec{\mathbf{r}}|}\frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{\Delta t} = \frac{|\vec{\mathbf{v}}|^2}{|\vec{\mathbf{r}}|} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$