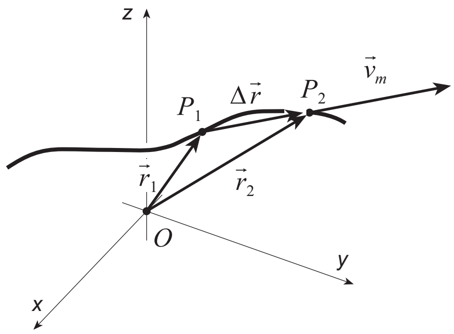
Moto curvilineo



Sia $\vec{r}_1 \equiv \overrightarrow{OP_1}$ il vettore posizione del punto materiale al tempo t_1 e $\vec{r}_2 \equiv \overrightarrow{OP_2}$ il vettore posizione al tempo t_2 . Si definisce velocità (vettoriale) media il rapporto:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1},$$

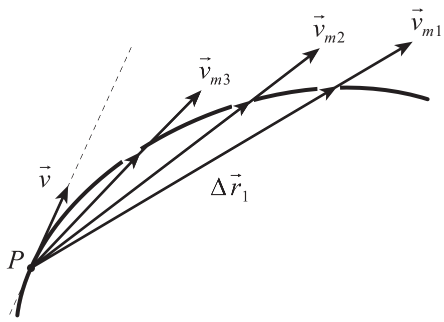
dove si è posto:

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$
$$\Delta t \equiv t_2 - t_1;$$

si osservi che il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ e il vettore velocità media $\vec{v}_m$ risultano tra loro paralleli.

Analogamente a quanto osservato nel caso del moto rettilineo, la velocità media non fornisce un'indicazione completa circa il moto. Per tale motivo si introduce la velocità istantanea quale limite del rapporto tra spostamento e intervallo in cui si esplica tale spostamento, quando tale intervallo è fatto tendere a zero. Così la velocità istantanea (vettoriale) al tempo t_0 vale:

$$\vec{v}(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t \equiv t_0}. \tag{12}$$



Al tendere dell'intervallo di tempo Δt a zero, il vettore spostamento $\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ varia con continuità in modulo e direzione sino a far coincidere, al limite, la sua direzione con quella della retta tangente alla traiettoria nel punto P occupato dal corpo al tempo t_0 . Pertanto il vettore velocità è tangente alla traiettoria. Utilizzando la relazione (3:fine), la velocità (12) può esprimersi come:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{x}\frac{dx}{dt} + \hat{y}\frac{dy}{dt} + \hat{z}\frac{dz}{dt} = \hat{x}\,v_x + \hat{y}\,v_y + \hat{z}\,v_z, \tag{13}$$

dove

$$\begin{cases} v_x \equiv \dfrac{dx}{dt}, \\ v_y \equiv \dfrac{dy}{dt}, \\ v_z \equiv \dfrac{dz}{dt}, \end{cases}$$

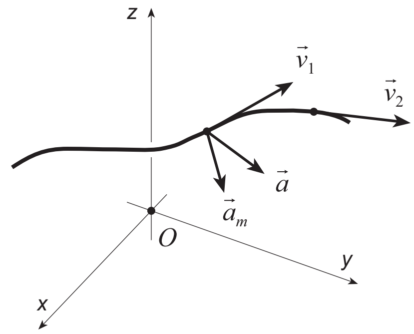
sono le componenti del vettore $\vec{v}$. Pertanto il modulo della velocità vale:

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}}\,.$$

Attraverso l'uso dell'ascissa curvilinea è possibile esplicitare la direzione del vettore velocità, infatti dalla definizione (12) e dalla relazione (4:fine) segue:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{t}\,\frac{ds}{dt}; \tag{14}$$

calcolando il modulo di ambo i membri di tale espressione si ha:



$$v = \left|\hat{t}\,\frac{ds}{dt}\right| = \left|\hat{t}\right|\left|\frac{ds}{dt}\right| = \frac{ds}{dt},$$

così la relazione (14) diventa:

$$\vec{v} = \hat{t}\,v\,,$$

cioè la velocità $\vec{v}$ calcolata in un punto della traiettoria è un vettore tangente alla traiettoria nel punto considerato.

Analogamente al caso del moto rettilineo, se $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}(t_1)$ e $\vec{v}_2 \equiv \vec{v}(t_2)$ rappresentano le velocità assunte dal punto materiale rispettivamente ai tempi t_1 e t_2, si definisce accelerazione (vettoriale) media nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$, il rapporto:

$$\vec{a}_m \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}\,,$$

in cui:

$$\Delta\vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$
$$\Delta t \equiv t_2 - t_1.$$

Inoltre si definisce accelerazione (vettoriale) istantanea al tempo t_0, il limite:

$$\vec{a}(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{t \equiv t_0}; \tag{15}$$

esprimendo il differenziale $d\vec{v}$ della velocità come:

$$d\vec{v} = \hat{x}\,dv_x + \hat{y}\,dv_y + \hat{z}\,dv_z\,,$$

l'accelerazione può essere scritta come:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{x}\frac{dv_x}{dt} + \hat{y}\frac{dv_y}{dt} + \hat{z}\frac{dv_z}{dt} = \hat{x}\,a_x + \hat{y}\,a_y + \hat{z}\,a_z\,,$$

dove:

$$\begin{cases} a_x \equiv \dfrac{dv_x}{dt}, \\ a_y \equiv \dfrac{dv_y}{dt}, \\ a_z \equiv \dfrac{dv_z}{dt}, \end{cases}$$

sono le componenti del vettore $\vec{a}$. Utilizzando la definizione di velocità (12) è possibile esprimere l'accelerazione attraverso il vettore posizione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt},$$

per cui si ha:

$$\begin{cases} a_x \equiv \dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y \equiv \dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z \equiv \dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Le espressioni della velocità e dell'accelerazione possono essere invertite per determinare, rispettivamente, la posizione e la velocità del corpo. Pertanto, dalla (12) risulta:

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt\,;$$

dalle relazioni (3:fine) e (13) questa identità vettoriale può esprimersi come:

$$\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz = \hat{x}\,v_x\,dt + \hat{y}\,v_y\,dt + \hat{z}\,v_z\,dt\,;$$

che corrisponde alle identità scalari:

$$\begin{aligned} dx &= v_x\,dt, \\ dy &= v_y\,dt, \\ dz &= v_z\,dt. \end{aligned}$$

Tali espressioni possono essere integrate separatamente, ottenendo così:

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} d\xi = \int_{t_0}^{t} v_x \, d\zeta, \\ \int_{y_0}^{y} d\xi = \int_{t_0}^{t} v_y \, d\zeta, \\ \int_{z_0}^{z} d\xi = \int_{t_0}^{t} v_z \, d\zeta, \end{cases}$$

in cui:

$$\vec{r}_0 \equiv \hat{x}\, x_0 + \hat{y}\, y_0 + \hat{z}\, z_0 , \tag{16}$$

rappresenta il vettore posizione all'istante t_0. Sviluppando le espressioni precedenti si ottiene, quindi:

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x \, d\zeta, \\ y = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y \, d\zeta, \\ z = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z \, d\zeta; \end{cases}$$

è possibile ricondurre queste tre relazioni scalari ad una relazione di tipo vettoriale, moltiplicando ciascuna relazione, rispettivamente, per i versori $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ e sommando, successivamente, membro a membro:

$$\hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z = \hat{x}\, x_0 + \hat{y}\, y_0 + \hat{z}\, z_0 + \hat{x} \int_{t_0}^{t} v_x \, d\zeta + \hat{y} \int_{t_0}^{t} v_y \, d\zeta + \hat{z} \int_{t_0}^{t} v_z \, d\zeta \, ;$$

d'altra parte, siccome i versori sono indipendenti dal tempo, possono essere portati sotto il segno di integrale e, applicando l'additività di tale operatore, dalle relazioni (2:fine), (13) e (16) segue infine:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\hat{x}\, v_x + \hat{y}\, v_y + \hat{z}\, v_z \right) d\zeta = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} \, d\zeta \, . \tag{17}$$

Si osservi che tale risultato corrisponde, formalmente, alla relazione (8:fine) ricavata nel caso unidimensionale.

Esempio: (*moto uniforme*) Se la velocità del punto materiale è indipendente dal tempo e pari a $\vec{v}_0$, dalla (17) segue:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 \, d\zeta = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} d\zeta = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \left(t - t_0 \right)$$

e, in particolare, se $t_0 \equiv 0$, segue:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t.$$

Esempio: (*moto uniformemente accelerato*) Se l'accelerazione del punto materiale è indipendente dal tempo e pari a $\vec{a}_0$, integrando la relazione $d\vec{v} = \vec{a}_0\, dt$ dedotta dalla (15), segue:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}_0\, d\zeta = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \left(t - t_0\right),$$

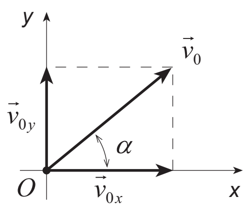
sostituendo questa espressione nella (17), si ha:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, d\zeta = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v}_0 + \vec{a}_0 \left(\zeta - t_0\right)\right] d\zeta = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\vec{a}_0 \left(t - t_0\right)^2.$$

In particolare, se $t_0 \equiv 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t, \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Esempio: (*moto di un proiettile*) Consideriamo il moto di un corpo lanciato dalla superficie terrestre con velocità $\vec{v}_0$. Supponiamo che siano trascurabili la resistenza dell'aria e la curvatura della Terra e inoltre assumiamo che l'accelerazione sia uniforme durante il moto e pari a $-\hat{y}\, g$, avendo scelto il sistema di riferimento *xy* coincidente col piano definito dai vettori $\vec{v}_0$ e $\hat{y}$, l'asse *y* diretto verso l'alto e l'origine coincidente col punto di partenza del proiettile; allora:



$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= \vec{g} = -\hat{y}\, g, \\ \vec{v}_0 &= \hat{x}\, v_{0x} + \hat{y}\, v_{0y}, \\ \vec{r}_0 &= \vec{0}, \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{cases} v_{0x} \equiv v_0 \cos\alpha, \\ v_{0y} \equiv v_0 \sin\alpha. \end{cases} \tag{19}$$

Dalle relazioni (18), la velocità $\vec{v}$ del proiettile risulterà espressa dalla legge:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t = \vec{v}_0 - \hat{y}\, g\, t,$$

che può essere esplicitata come:

$$\hat{x}\, v_x + \hat{y}\, v_y + \hat{z}\, v_z = \hat{x}\, v_{0x} + \hat{y}\, v_{0y} - \hat{y}\, g\, t,$$

da cui seguono le identità scalari:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x}, \\ v_y = v_{0y} - g\, t, \\ v_z = 0; \end{cases}$$

dalle relazioni (18), il vettore posizione $\vec{r}$ del proiettile sarà espresso dalla legge:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}\hat{y}\, g\, t^2$$

che può essere esplicitata come:

$$\hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z = \hat{x}\, v_{0x}\, t + \hat{y}\, v_{0y}\, t - \frac{1}{2}\hat{y}\, g\, t^2$$

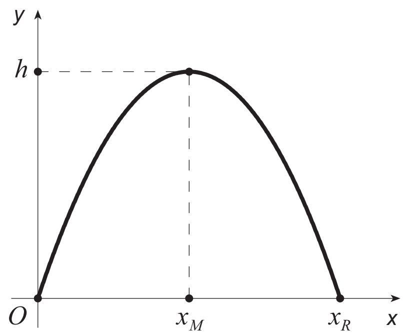
da cui seguono le identità scalari:

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t, \\ y = v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2, \\ z = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Siccome $v_z = 0$, il moto si esplica nel piano *xy*. È possibile ricavare l'equazione che descrive la traiettoria eliminando il parametro *t* dalle relazioni precedenti; sostituendo $t = x/v_{0x}$ nella seconda relazione, segue:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2 v_{0x}{}^2} x^2;$$

La traiettoria, quindi, è parabolica, con la concavità rivolta verso il basso. Il tempo t_M in corrispondenza del quale il proiettile raggiunge la massima quota si trova osservando che per $t \equiv t_M$ la velocità verticale v_y è nulla, cioè:



$$0 = v_{0y} - g\, t_M\,,$$

da cui, facendo uso delle relazioni (19) segue:

$$t_M = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\,,$$

così, sostituendo tale tempo nella legge oraria (20) per la coordinata *y*, si trova la quota massima *h* raggiunta dal proiettile:

$$h = v_{0y}\, t_M - \frac{1}{2} g\, t_M{}^2 = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}{}^2}{2g} = \frac{v_0{}^2 (\sin\alpha)^2}{2g}.$$

Dalla simmetria della parabola segue che il tempo di volo t_R necessario affinché il proiettile torni al livello del suolo è il doppio di t_M, così:

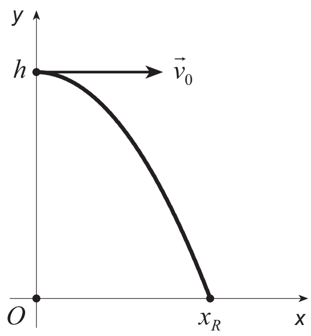
$$t_R = 2t_M = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Infine la *gittata* x_R, ovvero la distanza coperta in direzione orizzontale è data dal valore assunto dalla coordinata *x* al tempo t_R; così dalle relazioni (20) segue:

$$x_R = v_{0x}\, t_R = v_{0x}\frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 (\sin\alpha)(\cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}\,,$$

da cui si evince che la gittata è massima quando l'angolo α vale $45°$.

Esempio: Nelle stesse condizioni dell'esempio precedente consideriamo la caduta di un corpo da un'altezza h al quale viene fornita una velocità orizzontale $\vec{v}_0$. L'accelerazione cui è soggetto il corpo (nel sistema di riferimento di figura) è:



$$\vec{a}_0 = -\hat{y}\, g\,,$$

e inoltre la velocità iniziale e la posizione iniziale valgono, rispettivamente:

$$\vec{v}_0 = \hat{x}\, v_0\,,$$
$$\vec{r}_0 = \hat{y}\, h\,.$$

Pertanto il moto è uniformemente accelerato e dalle relazioni (18) segue:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t = \hat{x}\, v_0 - \hat{y}\, g\, t\,,$$

cioè:

$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ v_y = -g\, t, \\ v_z = 0; \end{cases}$$

dalle relazioni (18) il vettore posizione $\vec{r}$ del corpo è dato dall'espressione:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 = \hat{y}\, h + \hat{x}\, v_0 t - \frac{1}{2}\hat{y}\, g\, t^2,$$

cioè:

$$\begin{cases} x = v_0\, t, \\ y = h - \dfrac{1}{2} g\, t^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Anche in questo caso il moto è piano. Sostituendo $t = x/v_0$ nella seconda delle relazioni precedenti, si trova l'equazione della traiettoria:

$$y = h - \frac{g}{2{v_{0x}}^2} x^2,$$

quindi il moto è di tipo parabolico. Ponendo $y = 0$ nella legge oraria per la coordinata y si trova il tempo t_c che impiega il corpo a raggiungere il suolo:

$$0 = h - \frac{1}{2} g\, {t_c}^2,$$

da cui segue:

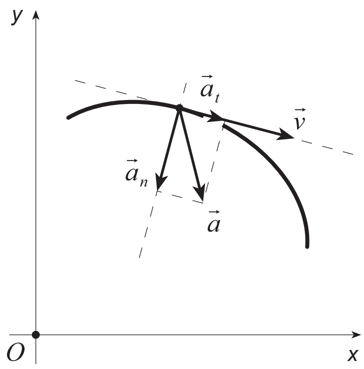
$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

ossia il corpo raggiunge il suolo allo stesso tempo di un corpo lasciato cadere dalla stessa altezza con velocità iniziale nulla. La massima coordinata x raggiunta è:

$$x_R = v_0\, t_R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Componenti dell'accelerazione

Consideriamo il moto di un punto materiale lungo una traiettoria curva che, per semplicità, assumiamo piana. Il vettore accelerazione ha la stessa direzione della variazione istantanea della velocità così, poiché la velocità cambia nella direzione in cui la traiettoria si incurva, l'accelerazione è sempre diretta verso la concavità della curva. Scomponiamo quindi il vettore accelerazione lungo la direzione tangente alla traiettoria, indicata dal versore $\hat{t}$ e la direzione normale alla traiettoria, indicata dal versore $\hat{n}$:

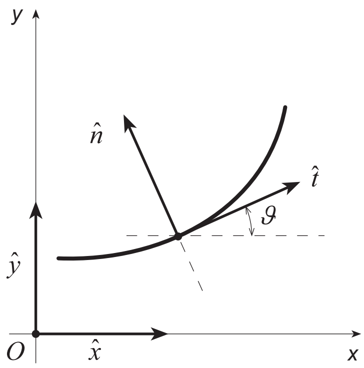


$$\vec{a} = \hat{t}\, a_t + \hat{n}\, a_n ; \qquad (21)$$

chiameremo la componente a_t *accelerazione tangenziale* e a_n *accelerazione normale* o *centripeta*. Per ricavare delle espressioni per tali quantità, ricordando che il vettore velocità $\vec{v}$ è diretto lungo la tangente alla curva, scriviamo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{t}\, v\right) = \hat{t}\,\frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{t}}{dt} v. \qquad (22)$$

La derivata di $\hat{t}$ può essere ricavata esprimendo tale versore attraverso i versori degli assi, risulta infatti:



$$\hat{t} = \hat{x}\cos\vartheta + \hat{y}\sin\vartheta ,$$

così derivando tale espressione, si ha:

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = -\hat{x}\sin\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt} + \hat{y}\cos\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt} = \left(-\hat{x}\sin\vartheta + \hat{y}\cos\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{dt} ;$$

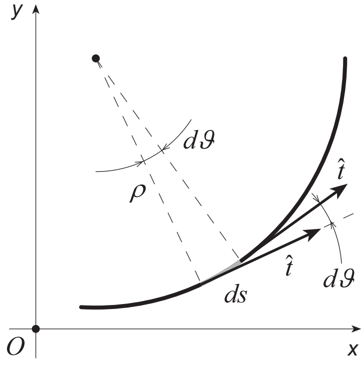
d'altra parte, siccome il versore $\hat{n}$ forma con l'asse *x* l'angolo $\vartheta + \pi/2$, risulta

$$\hat{n} = \hat{x}\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{y}\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{x}\sin\vartheta + \hat{y}\cos\vartheta ,$$

così:

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \hat{n}\,\frac{d\vartheta}{dt} . \qquad (23)$$

Inoltre, se ρ rappresenta il raggio di curvatura[2] della traiettoria nel punto considerato, risulta:



$$ds = \rho\, d\vartheta ,$$

[2] Il *raggio di curvatura* in un dato punto di una curva è il raggio del cerchio (*cerchio osculatore*) che meglio approssima la curva nel punto assegnato.

così:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}.$$

Sostituendo quindi questa relazione nella (23) e poi nell'espressione dell'accelerazione (22), si ha:

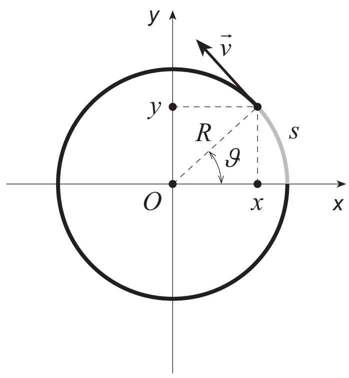
$$\vec{a} = \hat{t}\frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{t}}{dt}v = \hat{t}\frac{dv}{dt} + \hat{n}v\frac{d\vartheta}{dt} = \hat{t}\frac{dv}{dt} + \hat{n}\frac{v^2}{\rho}, \tag{24}$$

pertanto le componenti dell'accelerazione valgono:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt}, \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho}. \end{cases} \tag{25}$$

Se il modulo della velocità è costante, da tali relazioni segue che la componente tangenziale a_t dell'accelerazione è nulla, inoltre se la traiettoria è rettilinea e, di conseguenza $\rho \to \infty$, allora è nulla la componente normale a_n dell'accelerazione.

Esempio: (*moto circolare*) Si dice circolare il moto la cui traiettoria è una circonferenza., Siccome il vettore velocità cambia sempre di direzione, dalla relazione (24) segue che l'accelerazione centripeta risulterà sempre diversa da zero; l'accelerazione tangenziale invece sarà nulla nel caso di *moto circolare uniforme*, quando il modulo della velocità si mantiene costante nel tempo. La descrizione del moto circolare può essere effettuata attraverso l'impiego delle coordinate cartesiane oppure tramite l'ascissa curvilinea o, ancora, con le coordinate polari; tutte queste descrizioni sono legate tra loro essendo:



$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta, \\ y = R\sin\vartheta, \end{cases}$$

ovvero

$$s = R\vartheta,$$

dove x e y rappresentano le coordinate cartesiane del punto, R il raggio della circonferenza, ϑ l'angolo polare e s l'ascissa curvilinea. Dalla relazione (14) il modulo della velocità in questo moto vale:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\vartheta}{dt} = R\omega, \tag{26}$$

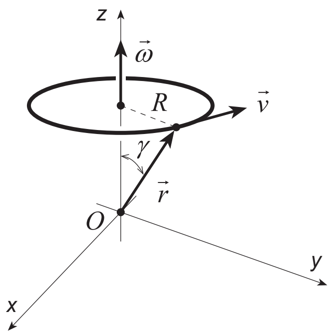
dove

$$\omega \equiv \frac{d\vartheta}{dt} \tag{27}$$

è detta *velocità angolare* o *pulsazione* e, dimensionalmente si esprime come:

$$[\omega] = \frac{rad}{s}.$$

È possibile dare un'interpretazione vettoriale della velocità angolare disponendo un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale in modo che la traiettoria giaccia nel piano xy ed il suo centro sia situato nell'origine O del sistema di riferimento. Poniamo:



$$\vec{\omega} \equiv \hat{z}\,\omega,$$

e consideriamo il vettore:

$$\vec{u} \equiv \vec{\omega} \times \vec{r} ,$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione del corpo durante il moto circolare. Allora dalla (26) il modulo di $\vec{u}$ vale:

$$u = \omega r \sin\gamma = R\omega = v ,$$

essendo $r\sin\gamma = R$; d'altra parte $\vec{u}$ è diretto istante per istante nella direzione di $\vec{v}$, cioè:

$$\frac{\vec{u}}{u} = \frac{\vec{v}}{v},$$

pertanto valendo anche l'identità tra i moduli dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vuol dire che questi due vettori sono tra loro uguali, e quindi risulta:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} , \tag{28}$$

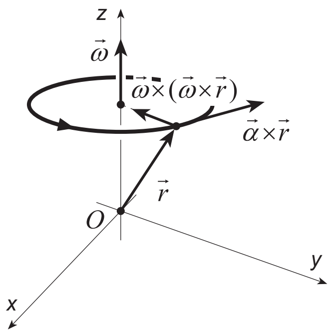
dove $\vec{\omega}$, limitatamente al moto circolare, è un vettore perpendicolare al piano della traiettoria e diretto nel senso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel senso del moto. Dalla relazione (28), l'accelerazione nel moto circolare può esprimersi come:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right), \tag{29}$$

dove si è posto:

$$\vec{\alpha} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \tag{30}$$

che è denominata *accelerazione angolare*. Siccome la variazione $d\vec{\omega}$ del vettore $\vec{\omega}$ è sempre diretta nella direzione del vettore $\vec{\omega}$ stesso, il vettore $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ è disposto tangenzialmente alla traiettoria ed il verso dipende dal segno della derivata $d\omega/dt$; il vettore $\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$ è diretto normalmente alla traiettoria. Questi vettori costituiscono quindi le componenti tangenziali e normali alla traiettoria del vettore accelerazione:



$$\begin{cases} a_t = \left|\vec{\alpha} \times \vec{r}\right|, \\ a_n = \left|\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right|; \end{cases}$$

in particolare, il loro modulo vale, rispettivamente:

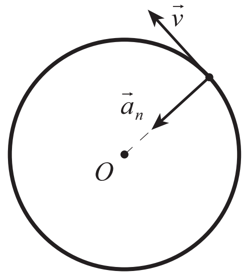
$$a_t = \left|\vec{\alpha} \times \vec{r}\right| = \alpha r \sin\gamma = R\alpha ,$$

e

$$a_n = \left|\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right| = \omega\left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \omega^2 r \sin\gamma = R\omega^2 \cdot$$

Ciò in accordo con le relazioni (25), essendo l'accelerazione tangenziale $dv/dt = d\left(R\omega\right)/dt = R\,d\omega/dt = R\alpha$ e l'accelerazione normale $v^2/R = \left(R\,\omega\right)^2/R = R\,\omega^2$; pertanto risulta:

$$\vec{a} = \hat{t}\,a_t + \hat{n}\,a_n = \hat{t}\,R\alpha + \hat{n}\,R\omega^2 \tag{31}$$



Come già anticipato, nel moto circolare uniforme, siccome $dv/dt = 0$, è nulla la componente tangenziale dell'accelerazione; poiché tale componente vale anche $R\alpha = R\,d\omega/dt$, la velocità angolare si mantiene costante nel tempo. Indicando con ω_0 il modulo della velocità angolare, dalla relazione (27) segue $d\vartheta = \omega_0\,dt$ che, integrata, fornisce la legge di variazione temporale dell'angolo polare ϑ:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0\left(t - t_0\right),$$

in cui ϑ_0 è l'angolo corrispondente all'istante t_0. In corrispondenza di un giro completo del punto materiale lungo la traiettoria circolare si ha $\vartheta - \vartheta_0 = 2\pi$, così, indicando con $T \equiv t - t_0$ il tempo necessario a percorrere tale giro, risulta:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \tag{32}$$

dove T è detto *periodo* del moto circolare. Si definisce *frequenza* del moto la quantità:

$$f \equiv \frac{1}{T} \tag{33}$$

e, dimensionalmente, siccome $\left[T\right] = s$, allora:

$$\left[f\right] = \left[\frac{1}{T}\right] = \frac{1}{s} \equiv Hz,$$

cioè s^{-1} è detto *hertz*. Con l'introduzione della frequenza, dalla (32) la velocità angolare si scrive:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \cdot \tag{34}$$

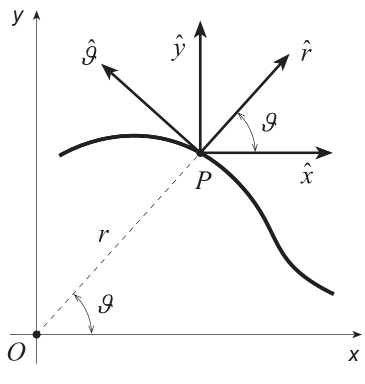
Qualora l'accelerazione angolare si mantiene costante nel tempo, indicando con α_0 il suo modulo, dalla (30) segue $d\omega = \alpha_0\,dt$ che integrata fornisce la legge di variazione temporale della velocità angolare:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0\left(t - t_0\right),$$

in cui ω_0 è la velocità angolare al tempo t_0. Infine, dalla (27) segue:

$$\begin{aligned}\vartheta &= \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega\,d\zeta = \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\omega_0 + \alpha_0\left(\zeta - t_0\right)\right] d\zeta = \\ &= \vartheta_0 + \omega_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\alpha_0\left(t - t_0\right)^2,\end{aligned}$$

che fornisce la legge di variazione temporale dell'angolo polare ϑ.



Esempio: (*cinematica del moto piano in coordinate polari*) Siano $\hat{r}$ e $\hat{\vartheta}$ rispettivamente il versore associato alla direzione del vettore posizione di un punto P ed il versore ortogonale a tale direzione orientato come mostrato in figura. Con riferimento alla figura, questi versori possono esprimersi relativamente ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale come:

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\vartheta + \hat{y}\sin\vartheta,$$
$$\hat{\vartheta} = \hat{x}\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{y}\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{x}\sin\vartheta + \hat{y}\cos\vartheta;$$

derivando tali versori rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\hat{x}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \hat{y}\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = \left(-\hat{x}\sin\vartheta + \hat{y}\cos\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{dt} = \hat{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt},$$
$$\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = -\hat{x}\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} - \hat{y}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = -\left(\hat{x}\cos\vartheta + \hat{y}\sin\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{dt} = -\hat{r}\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Utilizzando tali identità è possibile stabilire le espressioni della velocità e dell'accelerazione del punto su un piano, nelle coordinate polari r e ϑ. La velocità di un punto di vettore posizione $\vec{r}$ vale:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(r\hat{r}\right)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\hat{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}, \tag{35}$$

e la corrispondente accelerazione è data da:

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\hat{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\vartheta} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{\vartheta} + r\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\vartheta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\vartheta} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{\vartheta} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\hat{r} = \\
&= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right]\hat{\vartheta} = \\
&= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)\right]\hat{\vartheta}.
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}(t) = \hat{x}\,x(t) + \hat{y}\,y(t) + \hat{z}\,z(t) \qquad (2)}$$

$$\boxed{d\vec{r} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz \qquad (3)}$$

$$\boxed{d\vec{r} = \hat{t}\,ds\,. \qquad (4)}$$

$$\boxed{x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,d\zeta\,. \qquad (8)}$$