Il moto e la cinematica

- Un corpo si dice in moto relativamente ad un altro corpo quando la sua posizione, misurata rispetto all'altro corpo cambia nel tempo.
- Si chiama ***cinematica*** lo studio del moto dei corpi indipendentemente dalla cause che lo hanno generato.
- Per una completa determinazione del movimento di un corpo occorre, a rigore, conoscere il moto di ciascuna particella che lo compone.

Punto materiale

- In prima approssimazione si può prescindere dalle dimensioni, dalla forma, della composizione chimica, ecc. dei corpi, considerandoli unicamente come un punto, che denomineremo ***punto materiale***.
- Questa rappresentazione dei corpi risulta efficace in tutte le circostanze in cui le loro reali dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze coperte lungo il percorso che ne caratterizza il moto.
- Si può, quindi, definire il punto materiale come un punto geometrico dotato di massa.

Traiettoria e tipi di moto

- Il luogo delle posizioni occupate dal punto materiale durante il suo moto è una linea detta ***traiettoria***; questa può essere retta o curva che, a sua volta, può essere piana o sghemba.
- Se il moto avviene con una traiettoria rappresentata da una retta, il moto stesso si dice rettilineo.
- Se il moto avviene con una traiettoria rappresentata da una curva, il moto stesso si dice curvilineo.

Riferimenti spazio-temporali del moto

- Lo studio del moto di un punto materiale (o di un corpo) richiede la preventiva specificazione di un sistema spaziale di riferimento e inoltre è necessario stabilire un'origine per gli intervalli di tempo.
- Le caratteristiche del moto del punto materiale sono legate in maniera essenziale al sistema di riferimento scelto.
- Usualmente si fissa un sistema di coordinate cartesiane solidali con il corpo rispetto al quale si riferisce il moto,
- Si fissa un'ascissa temporale determinata stabilendo un istante iniziale a partire dal quale misurare gli intervalli di tempo.

Grafico orario - Costruzione

- Se in ogni punto della traiettoria prendiamo nota dell'istante di tempo valutato lungo l'ascissa temporale definita (misurato, ad esempio, con un cronometro) e dalla posizione occupata dal punto materiale in quell'istante di tempo riferita al sistema di riferimento adottato, si può costruire un grafico orario
- Il grafico orario è, quindi, una rappresentazione su un piano cartesiano del modo con cui il punto materiale si muove al passare del tempo

Grafico orario - Caratteristiche

- Nella rappresentazione del grafico orario l'asse delle ascisse rappresenta la variabile indipendente (tempo) e l'asse delle ordinate rappresenta la variabile dipendente (la posizione) ed i punti rappresentano le misure (osservazioni) effettuate.
- La curva rappresentativa delle caratteristiche del moto è frutto di una interpolazione.
- La curva interpolante non deve avere interruzioni o discontinuità e deve rappresentare una legge di corrispondenza che deve essere tale che ad ogni istante di tempo corrisponda una sola posizione e viceversa

Grafico Orario-Esempio 1

- Grafico orario di un punto materiale lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza di 10 m

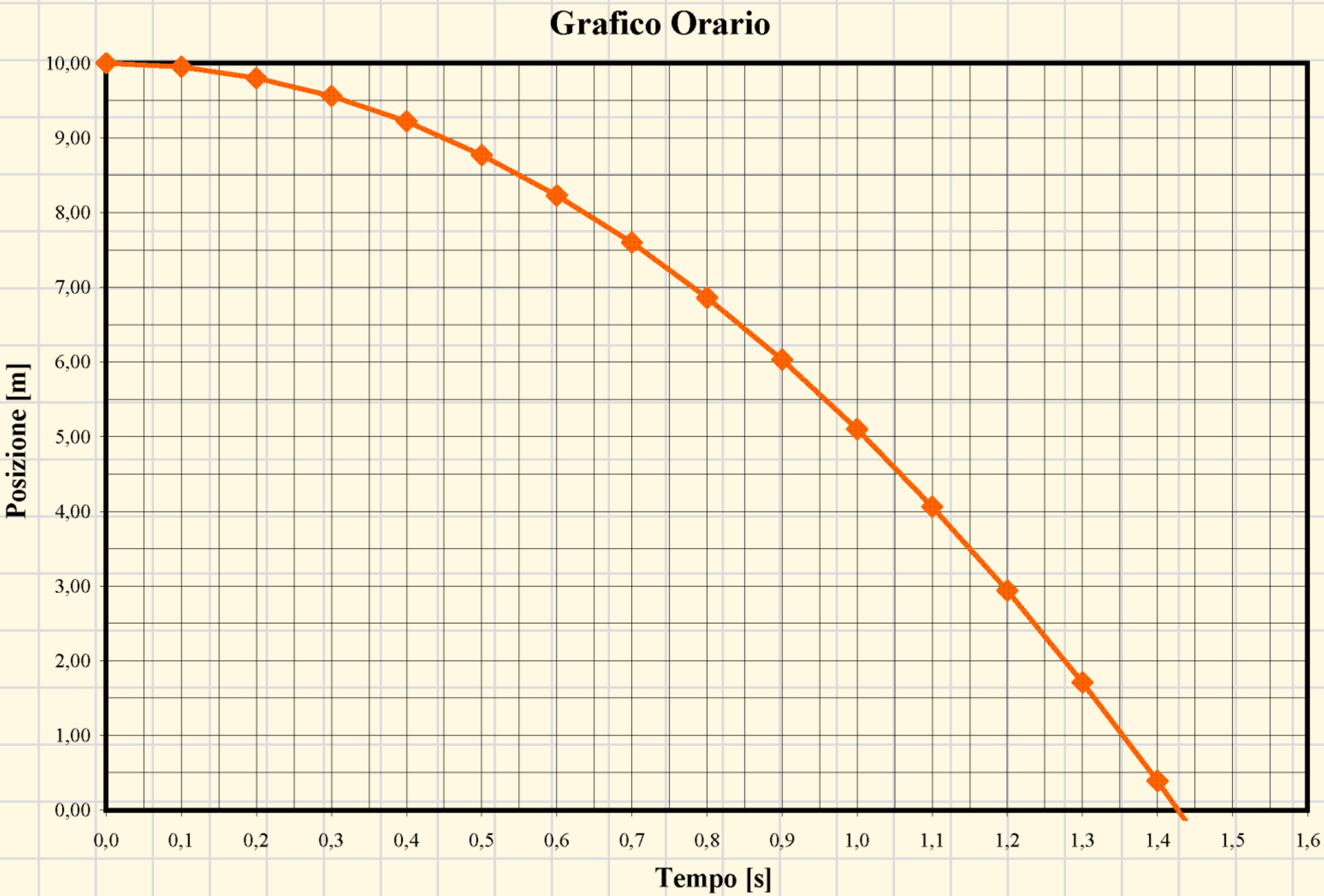


Grafico Orario-Esempio 2

- Grafico orario di un punto materiale che si muove di moto uniforme con velocità costante di 5 m/s

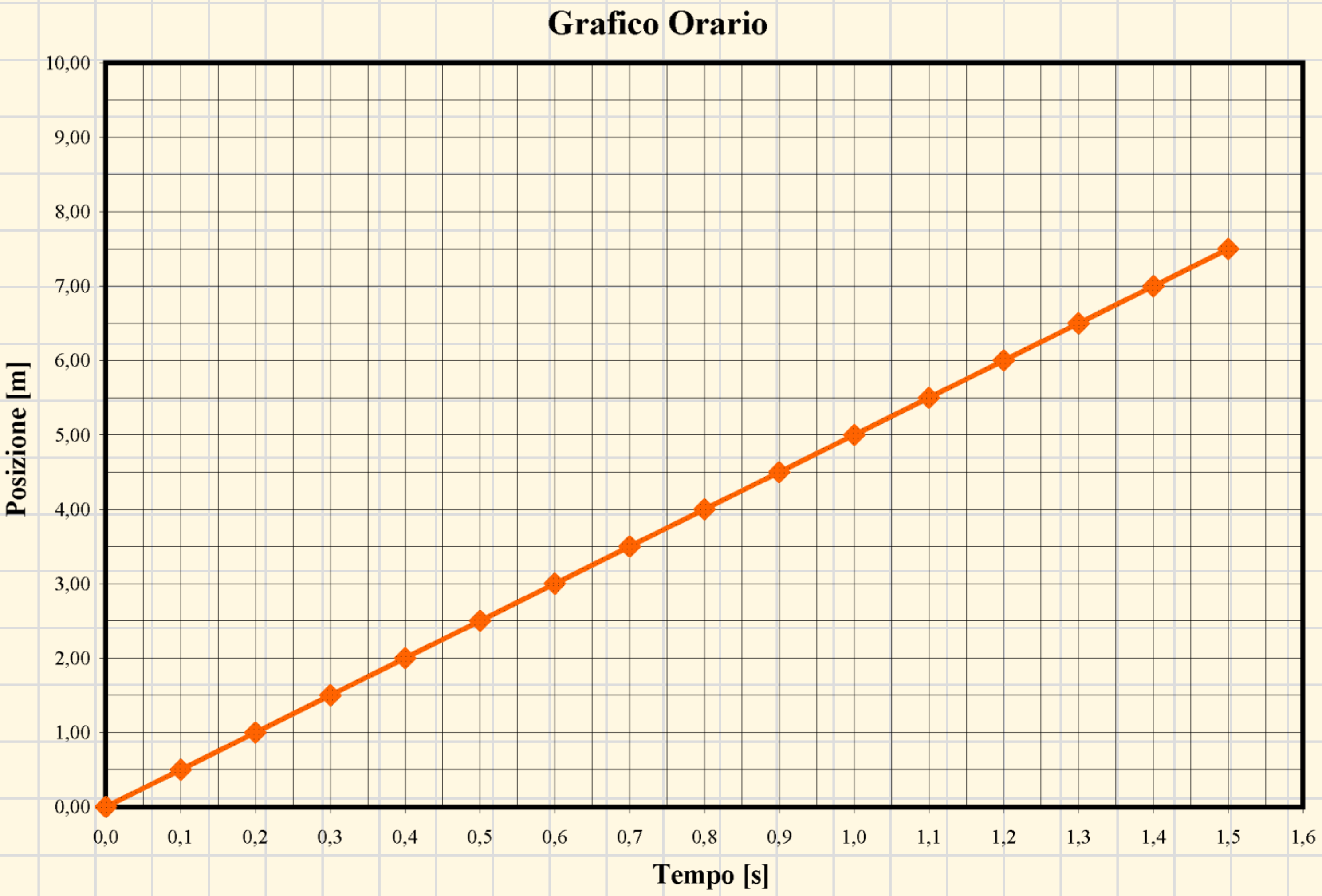
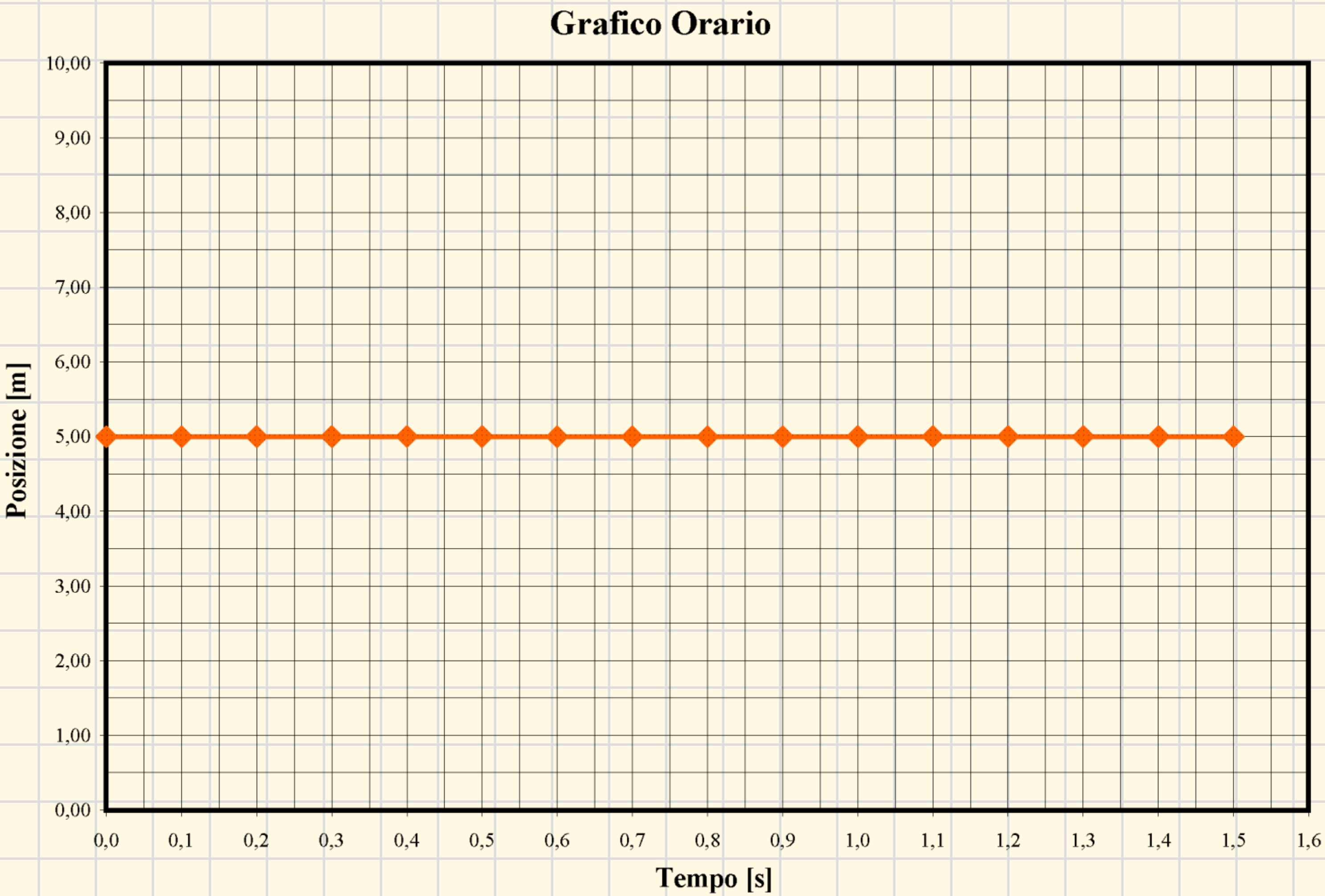


Grafico Orario-Esempio 3

- Grafico orario di un punto materiale fermo



Legge oraria

- Il grafico orario può anche essere rappresentato mediante una espressione matematica (Legge oraria)
- Mediante la legge oraria o il grafico orario è possibile risalire alla posizione del punto materiale in ogni istante di tempo
- Per gli esempi riportati precedentemente, le leggi orarie sono, rispettivamente, le seguenti

$$1:\; x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad \text{con } x_0 = 0,\, v_0 = 0,\, a_0 = 9.81\,\frac{m}{s^2}$$

$$2:\; x = x_0 + v_0 t \quad \text{con } x_0 = 0,\, v_0 = 5\,\frac{m}{s}$$

$$3:\; x = x_0 \quad \text{con } x_0 = 5m$$

Legge oraria

- Il moto di un punto materiale P è quindi determinato una volta che è nota la legge di variazione nel tempo delle sue coordinate

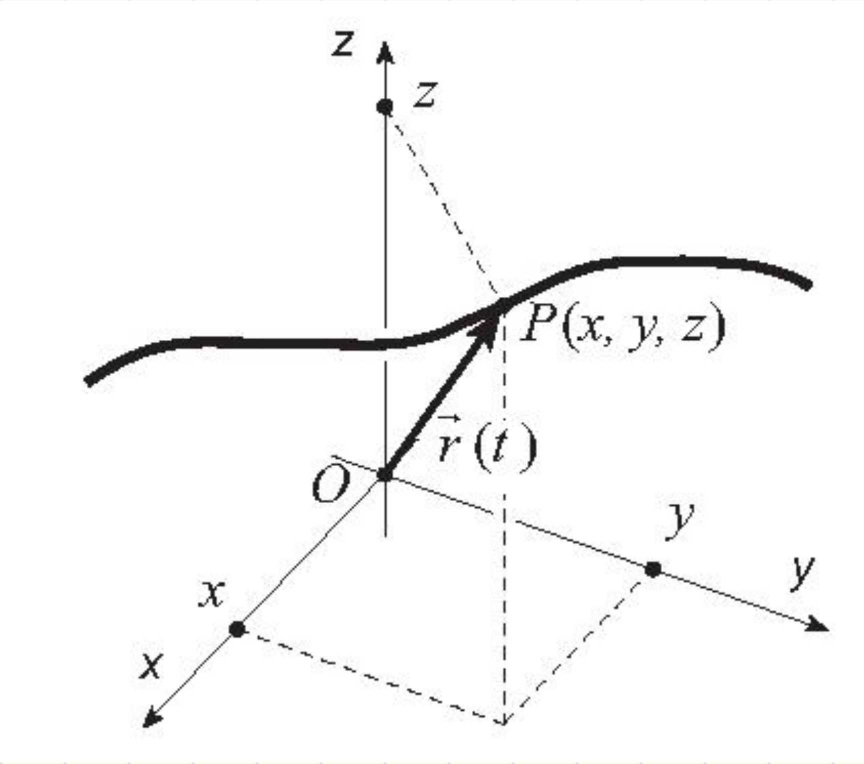
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

- Le relazioni precedenti costituiscono le equazioni parametriche della traiettoria
- L'eliminazione fra una qualsiasi coppia di equazioni parametriche della traiettoria del parametro t, fornisce le equazioni di due superfici nello spazio la cui intersezione, nell'intervallo specificato attraverso la variazione temporale, determina la traiettoria.

Legge oraria

- Il moto è compiutamente definito e descritto anche se si conosce la legge di variazione nel tempo del vettore posizione tracciato a partire dall'origine O del sistema di riferimento verso la particella

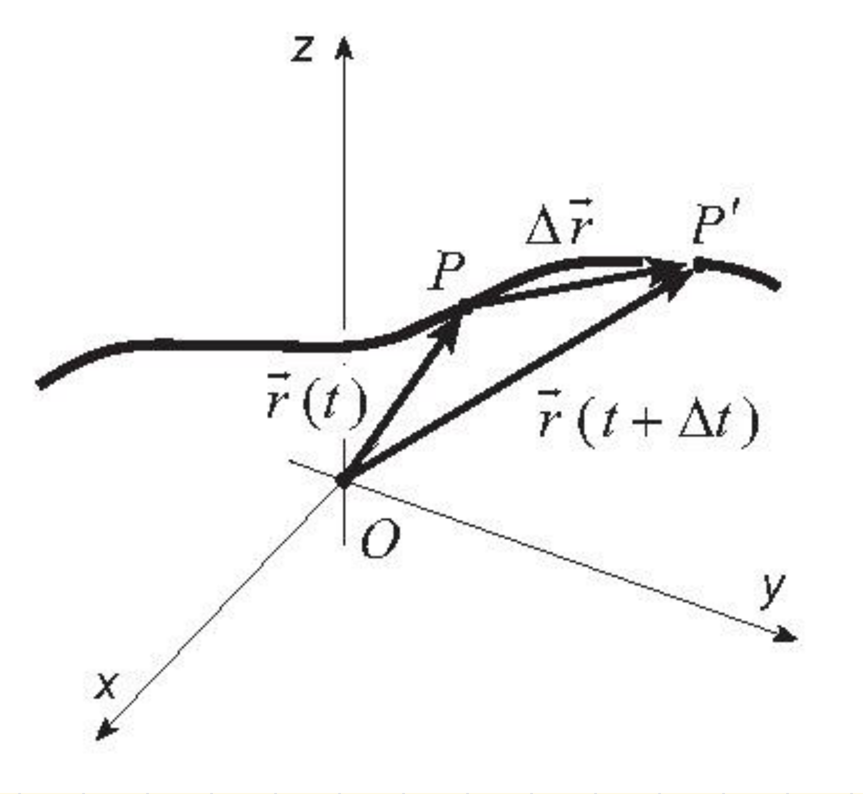
$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}(t) = \hat{x} \cdot x(t) + \hat{y} \cdot y(t) + \hat{z} \cdot z(t)$$



Spostamento

- Indicando con P e P′ le posizioni assunte dal punto materiale in corrispondenza di due istanti di tempo successivi t e t + Δt , si chiama ***spostamento nell'intervallo Δt*** il vettore:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r} = \hat{x}\cdot\Delta x + \hat{y}\cdot\Delta y + \hat{z}\cdot\Delta z$$



Spostamento infinitesimo

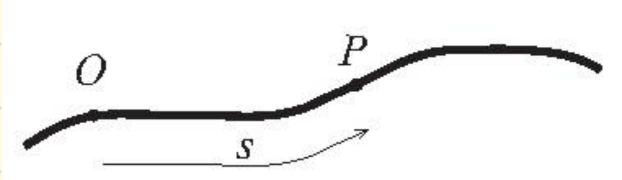
- Se $dr(t)/dt \neq 0$, è possibile considerare lo spostamento corrispondente ad un intervallo di tempo infinitesimo dt che prende il nome di ***spostamento infinitesimo***:

$$d\vec{r} = \hat{x} \cdot dx + \hat{y} \cdot dy + \hat{z} \cdot dz$$

- Le componenti dove le componenti dello spostamento infinitesimo lungo gli assi coordinati sono i differenziali delle equazioni parametriche della traiettoria

Moto riferito alla traiettoria

- Nota la traiettoria è possibile definire un sistema di coordinate alternativo la cui origine O è posta nella posizione occupata dal punto P all'istante iniziale.
- In tale sistema di riferimento, la generica posizione di P è misurata lungo la traiettoria, a partire dall'origine O.

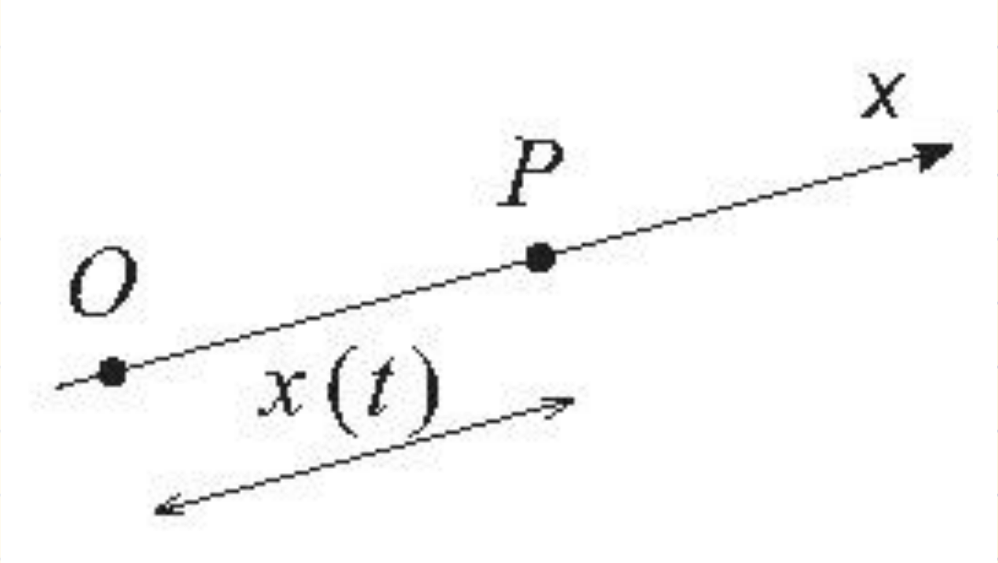


- La coordinata s è detta ascissa curvilinea di P.
- Se consideriamo un intervallo di tempo infinitesimo, lo spostamento infinitesimo ha la direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato ed il modulo uguale allo spostamento ds lungo l'ascissa curvilinea

$$d\vec{r} = \hat{t} \cdot ds$$

Moto rettilineo

- Si definisce moto rettilineo, il moto di un punto materiale che si sposta lungo una linea retta.
- Nel moto rettilineo, fissata un origine ed una direzione, il moto stesso è descrivibile adoperando una sola coordinata x=x(t)



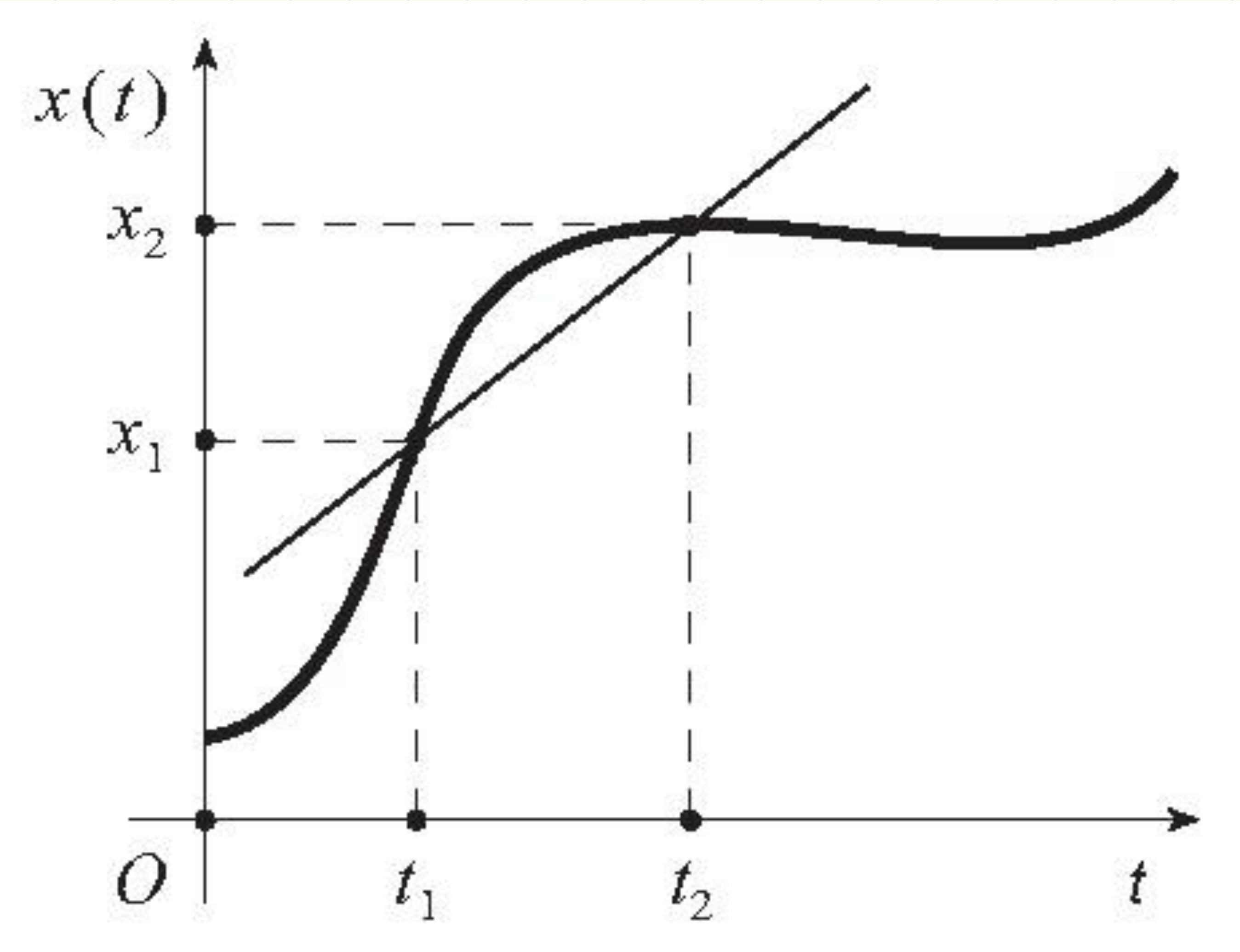
Velocità media

- Sia $x_1 \equiv x(t_1)$ e $x_2 \equiv x(t_2)$ la posizione del punto P rispettivamente, negli istanti di tempo t_1 e t_2; definiamo velocità media nell'intervallo di tempo t_2-t_1 il rapporto

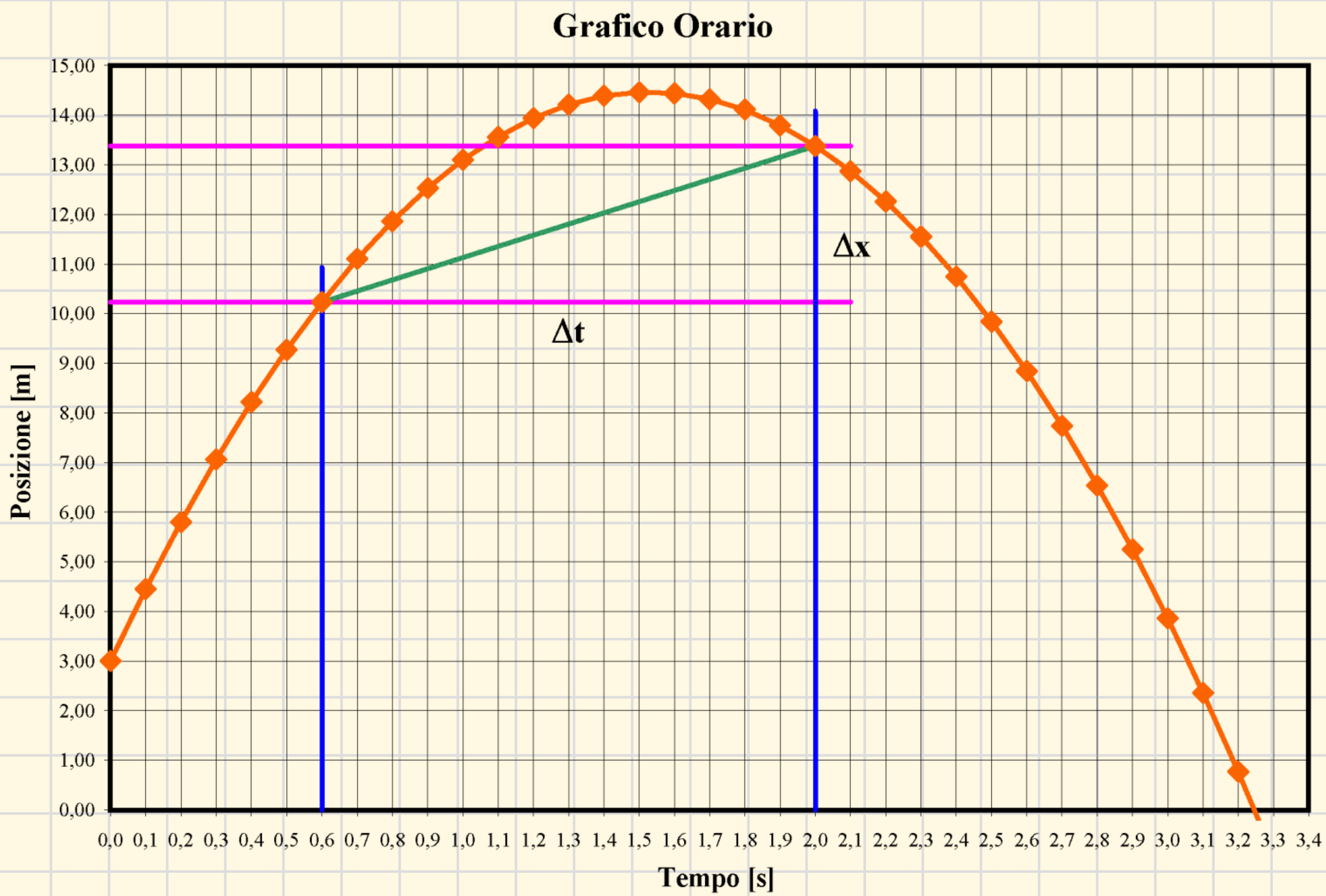
$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

- La velocità media fornisce un'indicazione circa il moto del punto P nell'intervallo di tempo Δt durante il quale il punto si sposta lungo il segmento di lunghezza Δx.
- Se rappresentiamo su un diagramma cartesiano la legge oraria del moto x=x(t), in tale grafico risulta che la velocità media calcolata tra i tempi t_1 e t_2 può essere interpretata come la pendenza della retta passante per i punti $(t_1, x(t_1))$ e $(t_2, x(t_2))$

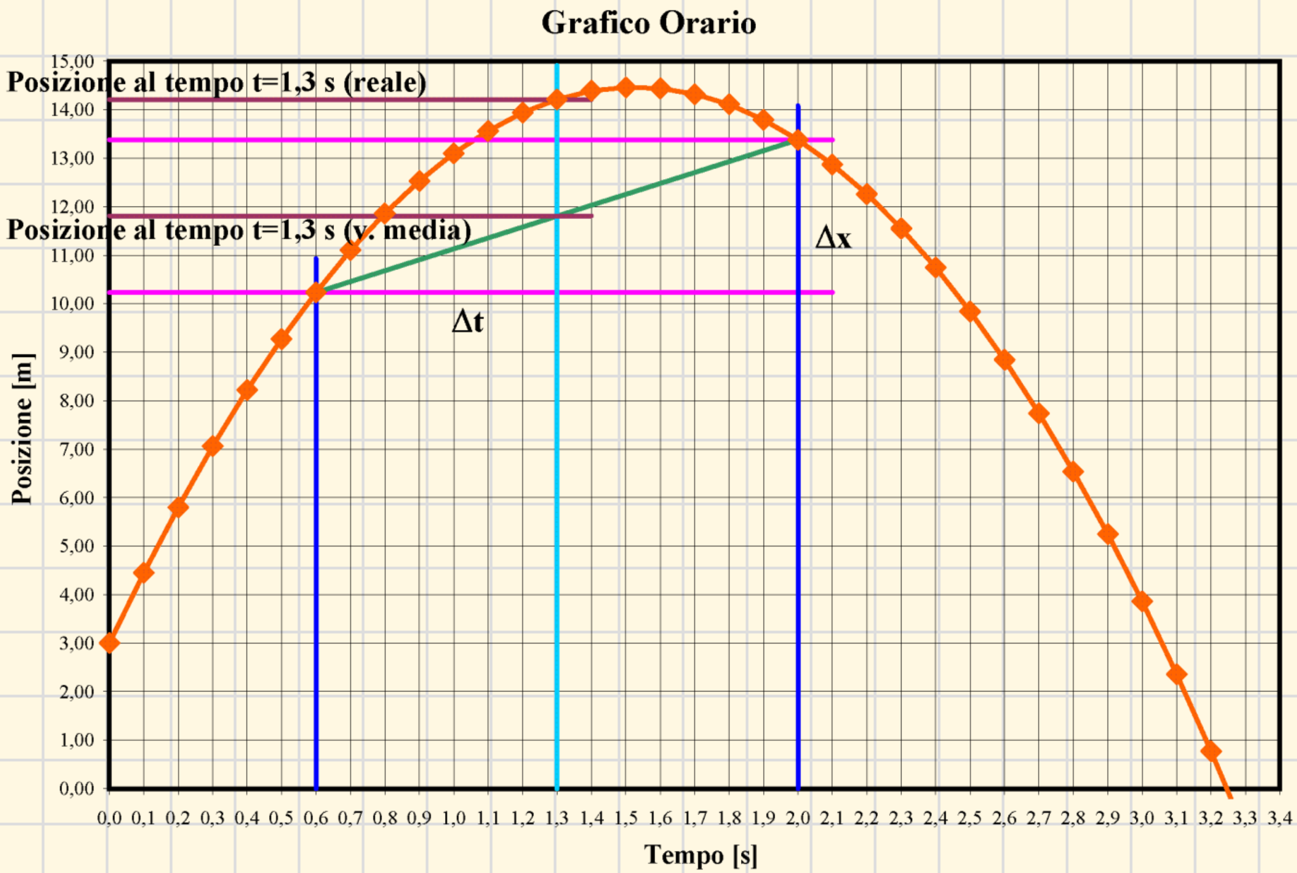
Velocità media



Velocità media



Descrizione del moto mediante la velocità media

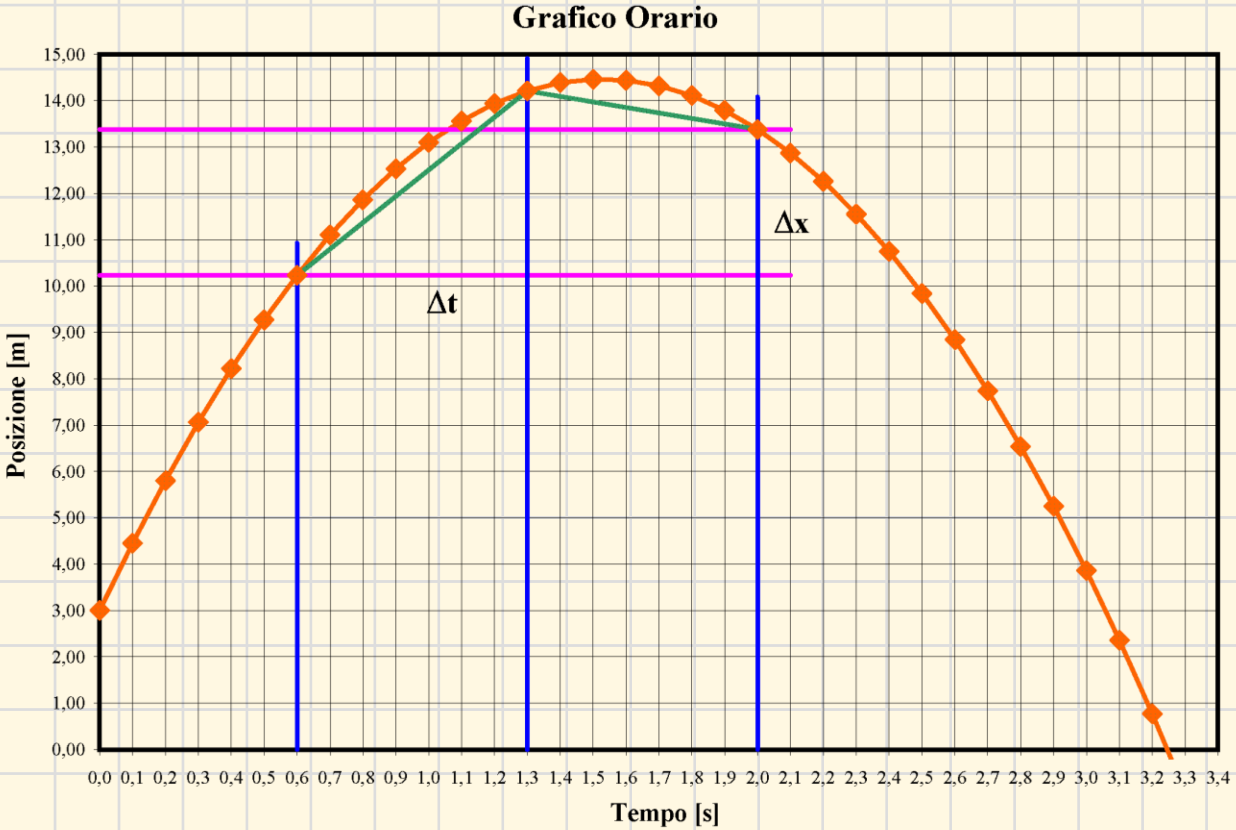


- La descrizione del moto mediante la velocità media è insoddisfacente.
- Le predizioni sono corrette solo agli estremi

Velocità media

- La velocità media non consente di caratterizzare completamente il moto tra due istanti di tempo, non permettendo di stabilire il valore che assume la velocità in corrispondenza di un particolare istante di tempo compreso nell'intervallo considerato.
- Tuttavia si può pensare di applicare il procedimento di calcolo della velocità media ad intervalli Δt di ampiezza via via decrescenti, al cui interno è contenuto l'istante in cui si vuole stabilire il valore della velocità.

Velocità media



- Riducendo la durata degli intervalli di tempo in cui calcolare la velocità media si ottiene una descrizione del moto decisamente migliore
- Se fosse possibile ridurre l'ampiezza di tali intervalli a zero, si avrebbe una descrizione del moto perfetta

Velocità media - Esempio

- Consideriamo una particella che si muove lungo l’asse x in maniera tale che la sua posizione varia nel tempo
- con la legge $x(t) = k \cdot t^2 + x_0$ dove $[x] = m$

$$[t] = s$$

$$x_0 = 2\,m$$

$$k = 2\,\frac{m}{s^2}$$

- Stabiliamo il valore che assume la velocità media negli intervalli:

5s - 6s, 5s - 5.1s, 5s - 5.01s, 5s - 5.001s, 5 s - 5.0001s

Velocità media - Esempio

$$t_0 = 5s,\ \Delta t_1 = 1s \Rightarrow v_{m1} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \frac{22m}{1s} = 22\frac{m}{s}$$

$$t_0 = 5s,\ \Delta t_2 = 0.1s \Rightarrow v_{m2} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \frac{2.02m}{0.1s} = 20.2\frac{m}{s}$$

$$t_0 = 5s,\ \Delta t_3 = 0.01s \Rightarrow v_{m3} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \frac{0.2002m}{0.01s} = 20.02\frac{m}{s}$$

$$t_0 = 5s, \Delta t_4 = 0.001s \Rightarrow v_{m4} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \frac{0.020002m}{0.001s} = 20.002\frac{m}{s}$$

$$t_0 = 5s,\ \Delta t_5 = 0.0001s \Rightarrow v_{m5} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \frac{0.00200002m}{0.0001s} = 20.0002\frac{m}{s}$$

Velocità media - Esempio