Esercizio 1

- Data una colonna di liquido di densità ρ ed altezza h. La quantità ρgh, con g l'accelerazione di gravità, può essere una forza?

Esercizio 1 - Soluzione

- La forza ($F=ma$) ha le dimensioni $[F]=[M][L][T]^{-2}$
- Quali sono le dimensioni di ρgh?

ρ è una densità per cui $[\rho]=[M][L]^{-3}$

g è un'accelerazione per cui $[g]=[L][T]^{-2}$

h è un'altezza per cui $[h]=[L]$

pertanto $[\rho gh] = [M][L]^{-3}[L][T]^{-2}[L]=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$

per cui ρgh non è una forza!!

Confrontando le dimensioni di ρgh con quelle della forza, si vede che ρgh ha le dimensioni di una forza per una lunghezza alla meno 2 ovvero $[F][L]^{-2}$

Ma anche la pressione ha le stesse dimensioni!

ρgh potrebbe essere una pressione.

ρgh rappresenta l'aumento di pressione in un liquido con la profondità.

Esercizio 2

- Ricavare la velocità del suono in un gas di densità ρ e pressione p, sapendo che essa si può esprimere come prodotto di potenze di queste due grandezze.

Esercizio 2 – Soluzione - 1

- Noi sappiamo che: $[v] = [\rho]^r\,[p]^s$ effettuando le opportune sostituzioni si avrà:

  $[L]\,[T]^{-1} = \{[M][L]^{-3}\}^r\,\{[M][L][T]^{-2}[L]^{-2}\}^s$ da cui

  $[L]\,[T]^{-1} = \{[M][L]^{-3}\}^r\,\{[M][T]^{-2}[L]^{-1}\}^s$ da cui

  $[L]\,[T]^{-1} = \{[M][L]^{-3}\}^r\,\{[M][T]^{-2}[L]^{-1}\}^s$ da cui

  $[L]\,[T]^{-1} = [M]^r[L]^{-3r}\,[M]^s[T]^{-2s}[L]^{-1s}$ da cui

  $[L]\,[T]^{-1} = [M]^{r+s}[L]^{-3r-1s}\,[T]^{-2s}$
- La massa compare nel secondo termine ma non nel primo, per cui, alla fine dei calcoli dovrà risultare $r+s=0$

Esercizio 2 – Soluzione - 2

- Eravamo arrivati alla seguente espressione:
  $[L]\,[T]^{-1} = [M]^{r+s}[L]^{-3r-1s}\,[T]^{-2s}$
- La massa compare nel secondo termine ma non nel primo, per cui, alla fine dei calcoli dovrà risultare r+s=0
- Confrontando gli esponenti a primo e secondo membro avremo:
- 1=-3r-s (per [L])
- -1=-2s (per [T])
- Dalla seconda espressione ricaviamo s=1/2 e, sostituendo nella prima espressione abbiamo 1=-3r-1/2 per cui 3/2=-3r da cui r=-1/2
- Ricordando che (per l’esponente della massa) doveva essere r+s=0 i risultati ottenuti sono corretti

Esercizio 2 – Soluzione - 3

- Ricordando l' espressione di partenza:

  $[L]\,[T]^{-1} = [M]^{r+s}[L]^{-3r-1s}\,[T]^{-2s}$
- E ricordando che abbiamo ottenuto

  $r=-1/2$

  $s=1/2$
- Sostituendo avremo:

  $[L]\,[T]^{-1} = [M]^{0}[L]^{-3*-1/2-1*1/2}\,[T]^{-2*1/2}$ da cui

  $[L]\,[T]^{-1} = [L]^{2/2}\,[T]^{-2/2}$ da cui

  $[L]\,[T]^{-1} = [L]\,[T]^{-1}$ ovvero una identità per cui il problema è risolto correttamente
- Si noti che la dipendenza dalla massa è sparita

Esercizio 2 – Soluzione - 4

- Ricordando che siamo partiti da: $[v] = [\rho]^r \, [p]^s$
- E ricordando che abbiamo ottenuto

  $r=-1/2$

  $s=1/2$
- Avremo: $[v] = [\rho]^{-1/2} \, [p]^{1/2}$ ovvero

$$v = k \cdot \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Esercizio 3

- Determinare le dimensioni della costante dielettrica del vuoto ε_0 che compare nella legge di Coulomb

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

sapendo che:

$[F]=[M][L][T]^{-2}$

$[q_1]=[q_2]=[I][T]$

Esercizio 3 – Soluzione

- Partendo dall'espressione della legge di Coulomb

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

e ricordando che

$[F] = [M][L][T]^{-2}$

$[q_1] = [q_2] = [I][T]$ si ha

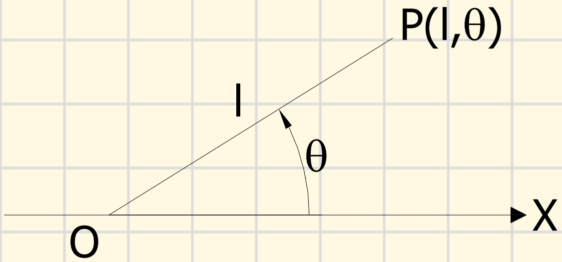
$[M][L][T]^{-2} = [I]^2[T]^2[\varepsilon_0]^{-1}[L]^{-2}$ da cui

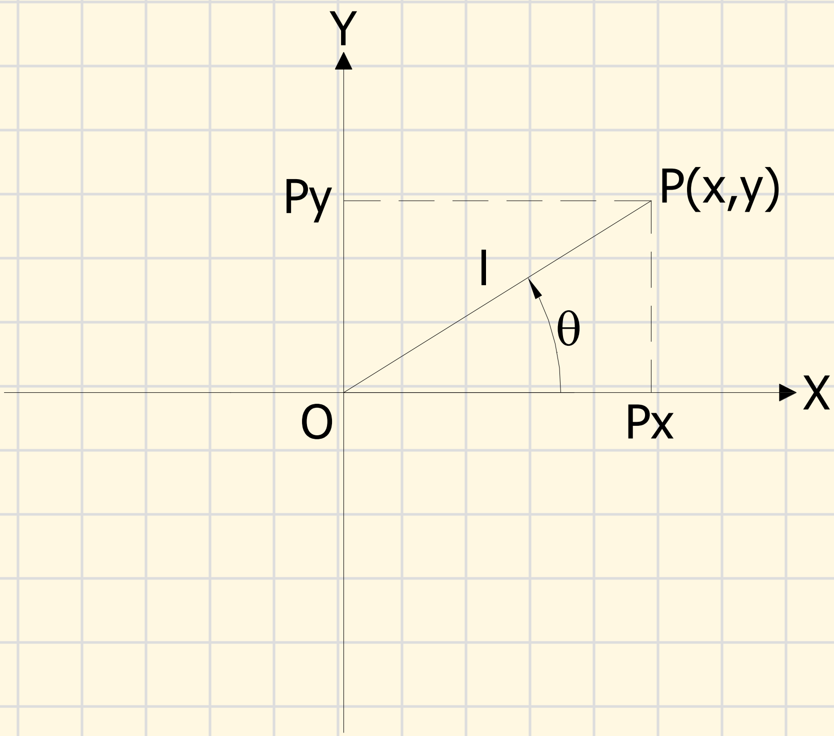
$[\varepsilon_0] = [M]^{-1}[L]^{-1}[T]^2[I]^2[T]^2[L]^{-2}$ da cui

$[\varepsilon_0] = [M]^{-1}[L]^{-3}[T]^4[I]^2$ ovvero

Esercizio 4

- Note le coordinate di un punto in un sistema di riferimento polare P(l,θ) determinare le coordinate dello stesso punto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente origine coincidente con l’origine del sistema di riferimento polare e asse delle ascisse parallelo con il corrispondente asse nel sistema di riferimento polare



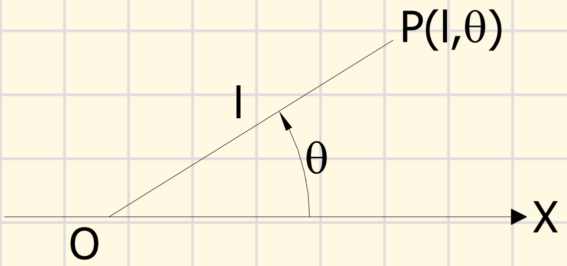


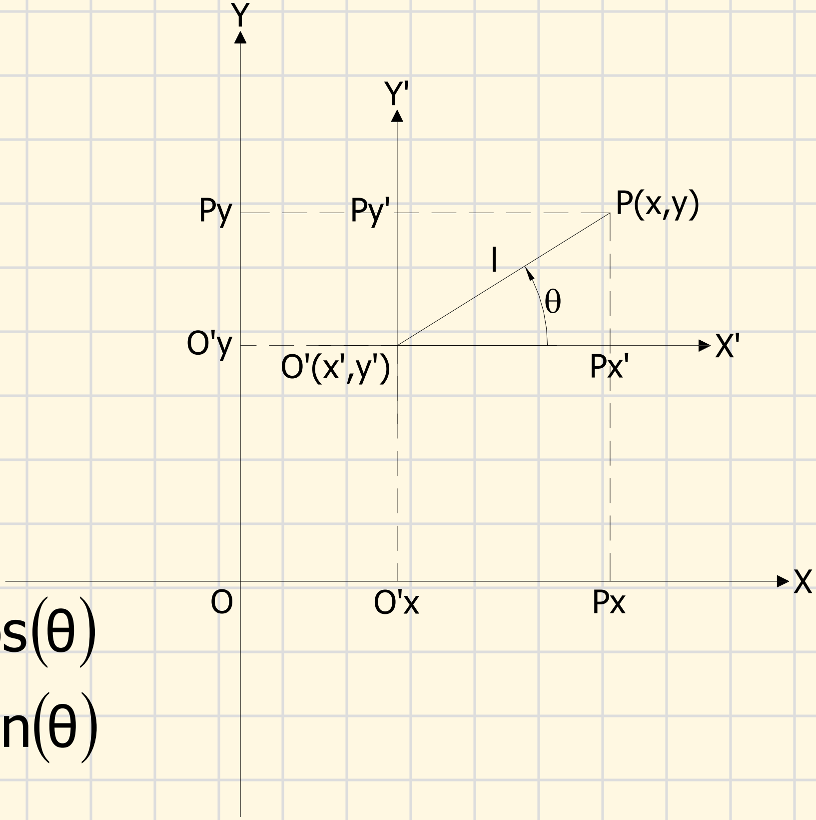
$$x = \overline{OP}_x = l \cdot \cos(\theta)$$

$$y = \overline{OP}_y = l \cdot \mathrm{sen}(\theta)$$

Esercizio 5

- Note le coordinate di un punto in un sistema di riferimento polare P(l,θ) determinare le coordinate dello stesso punto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente origine differente dall'origine del sistema di riferimento polare e asse delle ascisse parallelo con il corrispondente asse nel sistema di riferimento polare





$$x = \overline{OP}_x = \overline{OP}_{x'} + \overline{OO'}_x = x' + l \cdot \cos(\theta)$$

$$y = \overline{OP}_y = \overline{OP}_{y'} + \overline{OO'}_y = y' + l \cdot \mathrm{sen}(\theta)$$

Esercizio 6

- Note le coordinate di un punto in coordinate polari P(l,θ) determinare le coordinate dello stesso punto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente origine differente dall'origine del sistema di riferimento polare e asse delle ascisse ruotato di un angolo α rispetto al corrispondente asse nel sistema di riferimento polare